INVESTIGACIONES

SOBRE EL EMPUJE DE LAS TIERRAS,

Y SOBRE LA FORMA Y DIMENSIONES

QUE DEBEN DARSE

Á LOS MUROS DE REVESTIMIENTO,

ACOMPAÑADAS DE UN MÉTODO PRÁCTICO AL ALCANCE DE LOS OBREROS QUE TIENEN ALGUN HÁBITO EN SERVIRSE DE LA REGLA Y EL COMPAS PARA RESOLVER CON SUMA FACILIDAD LOS PRINCIPALES PROBLEMAS RELATIVOS Á LA FORMA Y DIMENSIONES QUE DEBEN DARSE Á LOS MUROS DE REVESTIMIENTO,

POR R. PRONY,

MIEMBRO DEL INSTITUTO NACIONAL DE CIENCIAS Y ARTES, Y DIRECTOR DE LA ESCUELA DE PUENTES Y CALZADAS.

TRADUCIDAS AL CASTELLANO

PARA EL USO DE LOS ESTUDIOS

DE LA INSPECCION GENERAL DE CAMINOS.

INVESTIGACIONES

SOBRE EL EMPUJE DE LAS TIERRAS,

Y SOBRE LA FORMA Y DIMENSIONES

DE LOS MUROS DE REVESTIMIENTO,

POR R. PRONY.

PREAMBULO.

1 Coulomb publicó en 1773 (*tomo VII de la Coleccion de las obras presentadas á la Academia de las Ciencias de París por los sabios extrangeros*) una Memoria, en la qual trata de la aplicacion de la mecánica á muchas qüestiones que interesan á la ciencia y al arte de construir, y en la qual creo se halla resuelto por la primera vez el problema del empuje de las tierras, teniendo en consideracion los efectos del rozamiento y de la cohesion.

Diez y siete años despues (en 1790) di en mi arquitectura hidráulica (*art. 596 y sig.*) una teoría del empuje de las tierras, en la qual se hallan comprehendidas las mismas circunstancias físicas; pero habiendo vuelto á trabajar sobre esta misma teoría, repitiendo de nuevo todos los cálculos, he logrado simplificarla y aclararla de modo, que podrán hacer uso de ella y aplicarla con grande utilidad aun los prácticos que ignoren los primeros elementos del cálculo; y á fin de que los obreros puedan aprovecharse de los resultados prácticos, añadiré un método gráfico para determinar el perfil de un muro destinado á contrarestar el empuje de las tierras, sin cálculo y con mucha facilidad, y tal qual lo darian las fórmulas analíticas.

2 Supongo, como lo han hecho quantos han trabajado sobre este problema, que el *talud* natural de las tierras es *rectilíneo*, sea que se hayan movido ó no recientemente: la experiencia hace ver todos los dias que esta hipótesis difiere muy poco de la realidad, particularmente quando hay poco tiempo que las tierras han sido removidas.

Tambien supongo, que la cohesion, si la hay, es uniforme en toda la masa de tierra que tiende á derribar un muro, y que el rozamiento es proporcional á la presion normal; lo que tambien es conforme á la experiencia.

Admitidas estas tres suposiciones, la solucion del problema puede reducirse á una análisis, aplicable á los objetos prácticos, por medio de fórmulas cómodas, para determinar en todos los casos las dimensiones que deben darse á los muros para que sostengan el empuje de las tierras.

3 Sea ABCD (*fig. 1*) el perfil de un muro que sostiene el empuje de las tierras, cuyo perfil indefinido es GBCH (la línea BG se supone horizontal, y BC vertical); para apreciar el empuje de estas tierras es necesario distinguir el caso en que hay cohesion entre sus partes, de aquel en que las tierras han sido removidas recientemente, y en las quales se supone que sus moléculas no adhieren entre sí, y por consiguiente no hay adhesion.

En el primer caso, si la masa GBCH no se hallase detenida por el obstáculo ABCD, y que BC fuese mayor que una cierta altura, cuyo valor darémos, se separaria de GBCH un prisma, cuyo perfil es FBC, de modo que la línea CF separaria las tierras que tienden á desprenderse, de las que permanecen estables en virtud de la *cohesion* y del *rozamiento*.

En el segundo caso, en que se supone destruida la fuerza de *cohesion* entre las moléculas de la tierra, la línea de separacion seria CG, mas inclinada al horizonte que CF, y separando el triángulo GCB de la masa GCH, las moléculas colocadas sobre GC se mantendrian en equilibrio únicamente por el *rozamiento*, siendo así que para mantenerse en equilibrio sobre el talud CF necesitan al mismo tiempo de la *cohesion* y del *rozamiento*.

Siendo los rozamientos proporcionales á las presiones, el ángulo CGH permanece siempre el mismo, qualquiera que sea la altura BC. No sucede lo mismo con el ángulo FCH, el qual tiene con BC una relacion, que determinaré dentro de poco; lo qual interesará particularmente á los Ingenieros.

Siendo por suposicion la línea FC el límite que separa la parte de las tierras que tienden á desprenderse, venciendo juntamente la *cohesion* y el *rozamiento*, de lo restante de las tierras cuyas moléculas permanecen reunidas entre sí, es evidente que la tendencia á *desprenderse* ó á *resbalar* es mayor sobre una línea CE, que hace con BC un ángulo menor que BCF; y si se pudiese detener por qualquier medio el triángulo ECF, subsistiendo siempre la cohesion y el rozamiento sobre CE, el triángulo BCE tenderia

á separarse de la masa representada por GECH, con tanta mayor facilidad, quanto la línea CE se aproxîmase mas á la vertical.

4 Sentado esto, concibamos el cuerpo mixto representado por el perfil FCDAF, compuesto de tierra y mampostería, en el estado de equilibrio. Supuesto que el equilibrio exîste, se puede imaginar que la masa total FCB está dividida en un cierto número de masas parciales; y qualquiera que sea el número y la forma de estas divisiones, cada masa parcial debe formar un sistema particular, en el qual la gravedad se halla en equilibrio con todas las fuerzas y resistencias que se oponen al descenso de dicha masa parcial.

Por consiguiente, imaginando una línea curva C*k*E, que divida al perfil FCB en dos partes EBC*k*E y E*k*CFE, la primera de estas partes se hallará solicitada: 1º por su gravedad: 2º por la suma de todas las fuerzas horizontales equivalentes á la suma de las resistencias de ABCD sobre todos los puntos de la línea CB: 3º por la suma de las presiones que actúan sobre C*k*E; y todas estas potencias, combinadas con el rozamiento y la cohesion sobre BC y sobre C*k*E deben de tener entre sí las relaciones que exîge el equilibrio.

La suma de las resistencias horizontales que obran sobre BC se equilibran con las presiones contrarias que resultan de las acciones combinadas de BC*k*EB y E*k*CFE; pero si se supone que E*k*CFE forma un cuerpo con GFCH, y no tiende por consiguiente á desprenderse, en este caso la accion que actúa contra BC será producida únicamente por BC*k*EB; y este empuje de BC*k*EB por sí solo no puede jamas ser mayor que la resistencia de ABCD, quando ABCD está construido de modo que pueda sostener todas las tierras que tienden á empujarlo ó derribarlo.

Luego el valor particular del empuje horizontal de un perfil BC*k*EB tiene por límite de sus incrementos, en las diferentes hipótesis de la curva C*k*E, la resistencia total que actúa sobre BC, quando ABCD está construido conforme á las condiciones del equilibrio absoluto de todo el sistema. Entre el infinito número de hipótesis de la curva C*k*E hay necesariamente una, en la qual el empuje horizontal contra BC es un *máxîmo*, y este *máxîmo* mide el empuje total efectivo que sostiene el muro ABCD. De esta propiedad se sigue, que suponiendo que la curva C*k*E, trazada sobre la figura, sea tal que el perfil BC*k*EB sea el que conviene al *máxîmo* empuje, si se considera la accion de otro perfil qualquiera BC*k*′E′B, contra BC, se podrá prescindir de la parte E*k*C*k*′E′; y en general, dexando subsistir el rozamiento y la cohesion so-

bre CkE, se podrá tratar la qüestion como si el perfil GEkCH fuese el de una masa perfectamente sólida, y el perfil BCkE el de la sola parte de la tierra capaz de separarse.

5 En el caso de los fluidos, una línea qualquiera tirada del punto C á la horizontal BG, goza de la propiedad del *máxîmo*, lo que indica que el empuje contra BC tiene siempre el mismo valor, qualquiera que sea el perfil BCkE de la capacidad que contiene al fluido. Esta propiedad, que se demuestra en la *hidrostática*, se deducirá como una conseqüencia de las fórmulas que darémos dentro de poco.

6 La investigacion de la curva CkE, que termina el perfil del mayor empuje, depende del ramo de la análisis, llamado *método de las variaciones*. Trataré este problema con la generalidad que permite dicho método en uno de los números del diario de la escuela politécnica; pero no tratándose aquí sino de un objeto de práctica, supondré que CkE es una línea recta, y buscaré entre todos los triángulos sólidos CBE, que pueden resbalar sobre su hipotenusa CE, venciendo el rozamiento y la cohesion que experimentan sobre esta misma línea CE, aquel cuyo ángulo BCE es tal, que la potencia horizontal, capaz de mantenerlo en equilibrio, sea un *máxîmo:* del valor de esta potencia se deducirán la estabilidad y las dimensiones del muro. Simplificada de este modo la qüestion, se puede resolver por medio de una análisis completa, capaz de poderse aplicar con utilidad á la práctica.

Evaluacion del empuje horizontal de las tierras contra un muro destinado á sostenerlas, teniendo en cuenta la cohesion y el rozamiento.

Sea

$P =$ la potencia horizontal capaz de sostener una masa sobre un plano inclinado, teniendo en consideracion la cohesion y el rozamiento,

$Q =$ el peso absoluto del cuerpo que dicha potencia sostiene sobre el plano inclinado,

$\varsigma =$ al ángulo formado por el plano inclinado y la vertical,

$\gamma =$ la fuerza de la cohesion sobre la unidad de la superficie,

$b =$ la superficie efectiva, sobre la qual tiene lugar la cohesion,

$f =$ la relacion de la presion normal al rozamiento,

$\tau =$ el ángulo cuya tangente es $1:f$,

$t = \text{tang.} \frac{1}{2}\pi$,

$h =$ la altura del plano inclinado;

se tendrá (*arq. hid. art.* 602 *y* 992)

$$P = \frac{Q(\cos.\varsigma - f \operatorname{sen}.\varsigma) - \gamma b}{\operatorname{sen}.\varsigma + f \cos.\varsigma} \ldots\ldots\ldots (1)$$

En el problema de que tratamos $\varsigma =$ ang. BCE, y Q es funcion de la altura BC, que indicarémos por h; y como representamos las masas ó los pesos por los perfiles, siendo π la pesantez específica de las tierras, tendrémos $Q = \pi$ area BCE $= \frac{1}{2}\pi h^2$ tang. ς. Para representar γ en la misma hipótesis, es menester substituir la unidad de longitud á la unidad de superficie, y $b\gamma = \frac{h\gamma}{\cos.\varsigma}$ representará la cohesion absoluta sobre CE. Ademas de esto, la relacion f da en general la tangente del ángulo BGC, ó la cotangente de BCG; por consiguiente, la equacion tang. $\tau = \frac{1}{f}$ supone que BCG $= \tau$, y recíprocamente.

Eliminando por medio de estos valores, Q, f y b de la equacion (1), é introduciendo por las fórmulas conocidas de trigonometría la tangente de $\tau - \varsigma$, se hallará la equacion

$$P = \frac{1}{2}\pi h^2 \operatorname{tang}.\varsigma \operatorname{tang}.(\tau - \varsigma) - \gamma h [\operatorname{tang}.\varsigma + \operatorname{tang}.(\tau - \varsigma)] \ldots (2)$$

á la qual puede darse la forma — (*)

$$P = \left[\frac{1}{2}\pi h^2 + \gamma h \operatorname{tang}.\tau\right] \operatorname{tang}.\varsigma \operatorname{tang}.(\tau - \varsigma) - \gamma h \operatorname{tang}.\tau \ldots (3)$$

(*) La comparacion de los resultados dados por las equaciones (2) y (3) puede presentar una dificultad, que aunque no pertenece de ningun modo al problema de que trato, me parece conveniente el aclararla: estas equaciones dan exâctamente los mismos valores para P, siempre que τ es menor que un ángulo recto, aunque difiera de él en una cantidad muy pequeña; pero en quanto llegue á serle igual, se tendrá

Para la equacion (2)..... $P = \frac{1}{2}\varpi h^2 - 2\gamma h \operatorname{cosec}.(2\varsigma)$

Para la equacion (3)..... $P = \frac{1}{2}\varpi h^2$.

Esta falta aparente de conformidad resulta de que la hipótesis de $\tau =$ un ángulo recto introduce en la equacion (3) una cantidad infinita (la tangente del quadrante de círculo), que se halla en ella dos veces con signos contrarios; y se sabe que en tales ocasiones la expresion $\infty - \infty$ puede indicar ó un cero absoluto ó una cantidad finita, que se obtiene quando se quiere, baxo la forma $\omega.\infty$, siendo ω una cantidad infinitamente pequeña: expresion indeterminada, de la qual es menester hallar entonces el valor. Por consiguiente, haciendo en la equacion (3) τ igual á un ángulo recto, menos un ángulo infinitamente pequeño, se hallará fácilmente que el valor de P es de la forma $\frac{1}{2}\varpi h^2 - \gamma h\,\omega.\infty$, y el producto indeterminado $\omega\infty$ es el factor 2 cosec. (2ς) dado por la equacion (2).

Determinacion del prisma de tierra que produce el mayor empuje. Observaciones sobre el caso en que este empuje le produce un fluido.

8 La equacion (3) es sumamente cómoda para la determinacion del *máxímo* que buscamos, pues no teniendo el segundo miembro otro factor variable que tang. ς. tang. $(\tau - \varsigma)$, basta el hacer *d.* [tang. ς. tang. $(\tau - \varsigma)$] $=$ o para hallar el valor de ς que corresponde al *máxímo* de P; de donde se deduce (*)

$$\varsigma = \frac{1}{2}\tau \ldots\ldots (4).$$

Soy el primero que ha hallado y publicado este resultado notable por su sencillez en mi mecánica filosófica, por medio del qual se obtienen, en todos los problemas relativos al empuje de las tierras, fórmulas, en las quales, habiendo introducido los elementos de la cohesion y del rozamiento, son no obstante tan sencillas como las de que se hace uso ordinariamente, y en las quales se han omitido estas circunstancias.

De lo dicho resulta, que el prisma de tierra que produce el mayor empuje horizontal contra BC es aquel cuyo ángulo BCE es la mitad del ángulo BCG. Importa notar que esta determinacion es absolutamente independiente de la cohesion (puesto que el valor de ς que conviene al *máxîmo* es dado por solo el ángulo del rozamiento), de modo que se aplica igualmente á las tierras recientemente removidas, y á aquellas en que exîste la cohesion; la única diferencia entre estos dos casos es que el valor *absoluto* del *máxímo* del empuje es mayor en el primer caso que en el segundo.

9 *Fig.* 2. Si por medio de la equacion (2) se construye una curva RMCS, en la qual AP representa ς, y PM representa P, y que se tome sobre el exe de las ς, AD $= \tau$, se hallará que el punto C, el mas distante del exe AD, corresponde en todas las hipótesis de los valores de τ, γ, π y h al punto B, tal que AB $=$ DB; si las tierras que debe sostener el muro se hallan divididas, disueltas, y por consiguiente reducidas casi al estado de fluidez, τ representará un ángulo ó un arco casi igual al quarto de la circunferen-

(*) Se puede determinar ς sin emplear el cálculo diferencial. Para esto, tomando C*a* igual al radio de las tablas, describiendo el arco *abc*, y tirando sobre C*b* la perpendicular *dbf*, se tendrá en general *db* $=$ tang. ς, y *bf* $=$ tang. $(\tau - \varsigma)$; y se hallará, por la geometría elemental, que el mayor producto de *db* por *bf* se verifica quando el punto *b* se halla en medio de *abc*, ó quando *db* $=$ *bf*.

cia, γ será una pequeña cantidad, y en este caso, por una parte el *máxîmo* CB de P corresponderá con cortísima diferencia á un valor AB de ς igual á la mitad de un ángulo recto, y por otra la curva RMS se aproxîmará tanto mas á ser una línea recta, quanto las tierras se hallen menos distantes del estado de fluidez.

En el caso de hallarse en estado de perfecta fluidez, se tiene $\tau =$ *ángulo recto*, $\gamma = 0$ y (equaciones (2) y (3)), $P = \frac{1}{2}\pi h^2$. La fórmula $\varsigma = \frac{1}{2}\tau$ da $\varsigma = \frac{1}{2}$ *ángulo recto*; por otra parte la curva RMS se confunde con la tangente T*Ct* paralela al exe AD, y una ordenada qualquiera P*m* es igual á CB y á $\frac{1}{2}\pi h^2$, de modo que el *máxîmo* CB no es en este caso sino lo que podría llamarse *primus inter pares*. De aquí se echa de ver que quando el muro ABCD (*fig. 1*) sostiene un fluido, todos los prismas BC*e*, que tienen en C su arista comun, producen el mismo empuje contra BC, por pequeña que sea la línea B*e*. Por consiguiente, las fórmulas precedentes, que á primera vista parece que, en el caso de la fluidez, dan un resultado paradóxico, concuerdan perfectamente con la teoría conocida de los fluidos.

Medios de conocer, por experimentos fáciles, el valor absoluto de la cohesion.

10 Substituyamos en la equacion (2), que da el valor general del empuje P, el valor de ς que corresponde al *máxîmo* de P, que es equacion (4), $\varsigma = \frac{1}{2}\tau$, y se tendrá

$$P = h \text{ tang.} \frac{1}{2}\tau \left(\frac{1}{2}\pi h \text{ tang.} \frac{1}{2}\tau - 2\gamma\right),$$

equacion muy sencilla, que da el *empuje efectivo,* al qual debe resistir el muro; pero todavía se le podrá dar una forma mas simple despues que se haya hecho uso de ella para una determinacion tan curiosa como útil. En los cuerpos sólidos se puede determinar por medio de experimentos directos sobre la rotura, y en general sobre la separacion de las partes de estos cuerpos, la cantidad γ contenida en esta equacion; pero quando los cuerpos se dividen con facilidad, como sucede con las tierras, semejantes experimentos serian dificiles, y nada satisfactorios ni concluyentes. Por consiguiente es menester emplear métodos indirectos, entre los quales hay uno sobre el qual he reflexîonado mucho tiempo

ha, y consiste en conocer por una parte el talud que toman las tierras quando acaban de ser removidas, y por otra la mayor profundidad á que se pueden excavar, antes que su cohesion sea destruida, sin que se desprendan, y con estos dos datos determinar la fuerza de cohesion.

La equacion (5) ofrece inmediatamente la solucion mas fácil que se pueda dar de este problema. Si llamamos $h_{,}$ el *máxîmo* de la altura á que puedan excavarse las tierras *coherentes* antes que se desprendan, es evidente que substituyendo $h_{,}$ en lugar de h en la equacion (5), el valor de P será $=0$; y teniendo presente que para simplificar la notacion se ha hecho

$$t = \text{tang.}\, \frac{1}{2}\tau,$$

se tendrá

$$\gamma = \frac{1}{4}\pi\tau h_{,} \ldots\ldots (6),$$

cuyo valor hace el cálculo muy cómodo, y se deduce de las cantidades $h_{,}$ y τ, las quales se determinan por medio de experimentos sumamente fáciles y poco costosos.

Relacion entre las inclinaciones respectivas de los taludes que toman las tierras quando hay cohesion entre sus partes, y quando no la hay, ó que las tierras han sido removidas recientemente.

11 Antes de aplicar las equaciones que preceden á la investigacion de las dimensiones de los muros de revestimiento, voy á hacer uso de ellas para determinar la relacion que hay entre el talud que toman las tierras, cuya cohesion no ha sido destruida, y el que adquieren las mismas tierras recientemente removidas. Esta relacion se deduce generalmente de una de las equaciones (2) ó (3), igualando á cero el segundo miembro. Si ademas se substituye por γ su valor, equacion (6), y que se saque el valor de ς, se tendrá, haciendo $\frac{h'}{h} = m$,

$$\text{tang. } \varsigma = t\left(\frac{1 \pm \sqrt{[(1-m)(1+m^2)]}}{1-(1-m)^2}\right) \ldots\ldots\ldots (7).$$

Esta equacion ofrece conseqüencias que se deben notar.

1.º La inclinacion del talud, quando hay *cohesion*, depende de la altura de este talud, lo que no sucede quando las tierras han sido removidas recientemente: entonces no hay cohesion, y las tierras toman el mismo talud en qualquiera altura.

2.º El ángulo formado por la línea del talud de las tierras

coherentes y por la vertical es siempre menor que τ, y mayor que $\frac{1}{2}\tau$ (τ es el ángulo formado por la vertical y por la línea del talud de las mismas tierras quando su cohesion ha sido destruida), de modo que los límites de este ángulo son τ y $\frac{1}{2}\tau$. Difiere tanto menos de τ, quanto la altura h de la excavacion es mayor, y tiende á coincidir con $\frac{1}{2}\tau$, quando h difiere poco de $h_{,}$.

3º Quando $h = \infty$, lo que da $m = 0$, se tiene $\varsigma = \tau$; y quando $h = h_{,}$, lo que da $m = 1$, se tiene $\varsigma = \frac{1}{2}\tau$; pero como en este último caso el valor cero del empuje corresponde al ángulo baxo el qual este empuje debe ser en general un *máxîmo*, resulta que quando $h = h'$, el empuje es cero, no solamente baxo el ángulo $\frac{1}{2}\tau$, sino baxo todos los ángulos posibles. Ademas de que esta conseqüencia es evidente, puesto que $h_{,}$ es la altura hasta la qual puede excavarse el terreno sin que se desprenda.

4º En el caso de la fluidez, $\tau =$ un ángulo recto, tang. $\frac{1}{2}\tau = 1$, $h_{,} = 0$, $m = 0$; por consiguiente, tang. $\varsigma = \frac{2}{0} = \infty$, ς es un ángulo recto, y la línea del talud horizontal, como debe ser.

Las primeras conseqüencias de la equacion (7) hacen ver que quando se hacen grandes excavaciones en terrenos coherentes, deben tomarse grandes precauciones. Si despues de haber profundizado hasta una cierta altura, se ve que se sostienen sin dar muestra alguna de desprenderse, nos inclinamos naturalmente á cierta seguridad, que á veces puede ser muy falsa. He visto un exemplo de esto en la excavacion de uno de los estribos de un gran puente, cuya construccion he presenciado; y por fortuna no resultó desgracia alguna.

Fórmulas para determinar las dimensiones de los muros que deben sostener el empuje de las tierras, teniendo en cuenta el rozamiento y la cohesion. Modo de aplicarlas á todos los grados de consistencia de las tierras desde la perfecta dureza hasta la perfecta fluidez. Comparacion de estas fórmulas con las que se emplean ordinariamente. Exemplos.

12 Paso á las fórmulas de que deben deducirse las dimensiones de los muros que sostienen el empuje de las tierras. Substituyendo en la equacion (5) el valor de γ dado por la equacion (6), se tiene

$$P = \frac{1}{2}\pi h t^2 (h - h_{,}) \dots\dots\dots\dots (8):$$

no creo pueda hallarse una forma mas simple para representar el valor del empuje *efectivo* y total á que debe resistir el muro, teniendo en consideracion la cohesion y el rozamiento, y con la ventaja de que se pueden determinar por experimentos muy fáciles los valores de todas las cantidades que entran en el segundo miembro de esta equacion.

13 Falta determinar el momento de los empujes horizontales, y el punto por donde pasa su resultante.

La equacion (8) da la suma de los empujes horizontales á la altura h, esta suma tomada á la altura z, será

$$\frac{1}{2}\pi z t^2 (z - h_{,}),$$

cuya diferencial $= \frac{1}{2}\pi t^2 (2z - h_{,})\,dz$. Esta presion elemental actúa al extremo del brazo de la palanca $h - z$, y su momento $= \frac{1}{2}\pi t^2 (h - z)(2z - h_{,})\,dz$.

Integrando esta expresion para tener la suma de los momentos sobre la altura z, y observando que esta suma es nula quando $z = h_{,}$, su valor general se reduce á

$$\frac{1}{2}\pi t^2 \left[-\frac{2}{3}z^3 + \left(h + \frac{1}{2}h_{,}\right)z^2 - h h_{,} z + \frac{1}{6}h_{,}^3 \right];$$

(téngase presente que se supone tang. $\frac{1}{2}\tau = t$), y á la altura total h.

momento del empuje total $= \frac{1}{6}\pi t^2 (h - h_{,})^2 \left(h + \frac{1}{2}h_{,}\right) \dots\dots (9)$.

14 Dividiendo este valor del momento total, por el del em-

puje total, equacion (8), se conocerá á qué distancia del punto C (*fig. 1*) pasa la resultante horizontal igual á este empuje total.

Distancia del pie del muro al punto de aplicacion de la resultante .... $= \dfrac{(h-h')(h+\frac{1}{2}h_{,})}{3h}$ .... (10):

expresion que se reduce á $\frac{1}{3}h$ quando se supone $h_{,}=0$.

15 Todas estas expresiones son, como se ve, muy sencillas y fáciles de calcular. Sean

La area ABCD del perfil vertical del muro .... $=$ A.

El peso específico de la mampostería .... $=\Pi$.

La distancia horizontal del centro de inercia ó de gravedad de A, al punto al rededor del qual se supone giraria este perfil, si el muro empezase á inclinarse en la direccion del empuje .... $= k$.

La fuerza horizontal equivalente á la adherencia del muro sobre la unidad de superficie de la plataforma de la fundacion .... $= r$.

El ancho de la base del muro .... $= b$.

La relacion entre el peso del muro y el rozamiento que produciria en su base si resbalase sobre ella, venciendo la adhesion en virtud de un empuje horizontal .... $= q$.

La relacion entre la presion normal de las tierras contra la superficie anterior del muro, y el rozamiento que producirian sobre ella en el momento en que empezase á ser derribado .... $= q'$.

Es fácil establecer las equaciones que deben servir para determinar las dimensiones del muro. Supondrémos primero que el paramento interior BC es vertical: distinguirémos dos casos; aquel en que el muro es rechazado horizontalmente, resbalando sobre su base; y aquel en que es derribado, girando sobre la arista exterior de esta base. Estos dos casos dependen de condiciones de equilibrio independientes, que es menester distinguir con atencion, y guardarse bien de confundirlas. En el primero la fuerza resistente, cuyo valor es $rb+q\left[A\Pi+\frac{1}{2}q'\pi ht^2(h-h_{,})\right]$ debe igualarse con el valor del empuje dado por la equacion (8); en

el segundo el momento de la fuerza resistente es $A\Pi k$.................. $+\frac{1}{2}bq'\pi ht^2(h-h_{,})+\frac{1}{2}b^2r$, que es menester igualarlo al empuje total dado por la equacion (9). Por consiguiente, teniendo presente que $t=\text{tang.}\frac{1}{2}\tau$, se hallarán las equaciones de equilibrio que siguen.

Primer caso. El muro puede moverse horizontalmente, resbalando sobre su planta:

$$br+qA\Pi=\frac{1-qq'}{2}\pi ht^2(h-h_{,})\text{.....}(11).$$

Segundo caso. El muro puede ser derribado girando al rededor de una de sus aristas inferiores.

$$A\Pi k=\frac{1}{2}\pi t^2(h-h_{,})\left[\frac{1}{3}(h-h_{,})(h+\frac{1}{2}h_{,})-bhq'\right]-\frac{b^2r}{2}\text{..}(12).$$

16 Conviene observar, que el rozamiento de las tierras con la mampostería nunca es tan grande como el que hay entre las tierras mismas; y como considerando esta última causa de resistencia se disminuye ya la solidez del muro mas de lo que convendria en una infinidad de casos prácticos, no se debe dudar de hacer $q'=0$, esto es, de hacer abstraccion del rozamiento de las tierras contra la superficie interior del muro, á fin de favorecer la solidez; y por la misma razon se puede hacer lo mismo con r en la equacion (12) solamente, lo que reduce las dos equaciones anteriores á

Primer caso. El muro puede resbalar sobre su plataforma

$$br+qA\Pi=\frac{1}{2}\pi ht^2(h-h_{,})\text{.....}(13).$$

Segundo caso. El muro puede ser derribado

$$A\Pi k=\frac{1}{6}\pi t^2(h-h_{,})^2(h+\frac{1}{2}h_{,})\text{.....}(14).$$

17 Para aplicar estas equaciones á las diferentes formas que deban darse á los muros solo falta substituir por A, b y k los valores correspondientes á dichas formas y dimensiones de estos muros.

Por consiguiente, haciendo

El grueso del muro, en su cordon.......................................$=x$,

La relacion entre la base y la altura del talud del paramento exterior.......................................} ....$=n$,

se tendrá, en la hipótesis de que el muro no tiene sino un talud exterior,

$$A = h\left(x + \frac{1}{2}nh\right);\ b = x + nh;\ Ak = h\left[\frac{1}{3}n^2h^2 + \left(\frac{x}{2} + nh\right)x\right]:$$

valores, que substituidos en las equaciones (13) y (14), dan

Primer caso. El muro puede resbalar sobre su plataforma

$$x = \frac{\left[\frac{1}{2}\pi t^2(h - h_{,}) - n\left(\frac{1}{2}\Pi hq + r\right)\right]h}{\Pi hq + r}$$

Segundo caso. El muro puede girar sobre una de sus aristas inferiores

$$x = -nh \pm \sqrt{\left[\frac{\pi t^2}{3\Pi h}(h - h_{,})^2\left(h + \frac{1}{2}h_{,}\right) + \frac{1}{3}n^2h^2\right]} \ldots (15).$$

18 De las fórmulas precedentes se deduce, como conseqüencia, el caso de la fluidez, haciendo $h_{,} = 0$; $\tau =$ ang. recto (se sabe que $t =$ tang. $\frac{1}{2}\tau$).

El empuje horizontal.. $= \frac{1}{2}\pi h^2$,

La suma de los momentos.. $= \frac{1}{6}\pi h^3$,

La distancia de la base del muro al punto de aplicacion de la resultante.. $= \frac{1}{3}h$.

El grueso del muro en el cordon, en el caso de la equacion (14)

$$x = h\left[-n \pm \sqrt{\left(\frac{\pi}{3\Pi} + \frac{1}{3}n^2\right)}\right] \ldots (16),$$

valores idénticos, á los que tendrian lugar para un fluido de la misma gravedad específica que las tierras.

19 Conviene poder comparar los resultados de la teoría precedente con los métodos de que comunmente hacen uso los constructores instruidos: estos consideran el prisma de tierra que tiende á derribar el muro, como un cuerpo sólido y pesado, que se trata de sostener sobre un plano inclinado, por medio de una potencia horizontal, haciendo abstraccion del rozamiento y de la cohesion, y suponiendo (sin que su teoría pueda ofrecer una demostracion suficiente), que el punto de aplicacion de la potencia

que empuja se halla al tercio de la altura del muro. Hemos visto, equacion (10), que esta distancia es $= \frac{(h-h_{,})\ (h+\frac{1}{2}h_{,})}{3h}$, y que por consiguiente no puede ser igual á $\frac{1}{3}h$ sino en el caso de $h_{,}=0$. Este es el caso de las tierras no coherentes, y de los fluidos.

En quanto al modo de estimar la accion horizontal de la potencia que empuja se hace de dos modos, adoptados ámbos por diferentes Ingenieros. Llamando como ántes τ el ángulo formado por la vertical y por el plano, sobre el qual tiende á resbalar el prisma de tierra, la primera evaluacion consiste en descomponer el peso total del prisma que empuja al muro en tres fuerzas: la primera $= \frac{1}{2}\pi h^2$ tang. τ. sen. τ, que obra perpendicularmente sobre el plano inclinado ó sobre la línea del talud de las tierras: la segunda $= \frac{1}{4}\pi h^2$ sen. (2τ), que es vertical; y la tercera $= \frac{1}{2}\pi h^2$ sen. $^2\tau$, que es horizontal, y procura derribar el muro, ó hacerle resbalar. Estas dos últimas son las componentes de una fuerza $\frac{1}{2}\pi h^2$ sen. τ, cuya direccion es paralela á la línea del talud, y que compuesta con la primera $\frac{1}{2}\pi h^2$ tang. τ. sen. τ, da un peso vertical igual al peso del prisma de tierra que empuja el muro.

El valor $\frac{1}{2}\pi h^2$ sen. $^2\tau$, difiere del dado, equacion (8), por la supresion de $h_{,}$, y la mutacion de tang. $^2\frac{1}{2}\tau$ en sen. $^2\tau$. Por consiguiente debe de dar mayores dimensiones, y puede emplearse en la práctica sin inconveniente.

La segunda evaluacion consiste en descomponer el peso entero del prisma que empuja al muro en dos fuerzas: la una $= \frac{\frac{1}{2}\pi h^2}{\cos.\tau}$, que obra perpendicularmente al plano inclinado ó á la línea del talud de las tierras; y la otra $\frac{1}{2}\pi h^2$, que actúa horizontalmente, de la qual depende el grueso que debe darse al muro, y que conserva siempre el mismo valor para una altura h

constante, qualquiera que sea la inclinacion del talud de las tierras.

Se ve que este empuje horizontal es el mismo que produce un fluido de igual gravedad específica que las tierras: por consiguiente daria la equacion (16).

20 Comparemos ahora las fórmulas dadas por los diferentes métodos: estas son

segun mi teoría $x = -nh \pm \sqrt{\left[\frac{\pi t^2}{3\Pi h}(h-h_{,})^2 \left(h+\frac{1}{2}h_{,}\right)+\frac{n^2h^2}{3}\right]}$,

segun las teorías adoptadas por varios Ingenieros ....

$$\begin{cases} x = h\left\{-n \pm \sqrt{\left[\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\Pi}\,\text{sen.}^2\tau + n^2\right)\right]}\right\} \ldots (17), \\ x = h\left\{-n \pm \sqrt{\left[\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\Pi} + n^2\right)\right]}\right\}. \end{cases}$$

La primera de estas equaciones es la equacion (15); la segunda es la que se obtiene descomponiendo primero el peso de las tierras en dos fuerzas, la una perpendicular, y la otra paralela á la línea del talud, y descomponiendo despues la fuerza paralela á la línea del talud en otras dos, la una vertical, y la otra horizontal; la tercera, que es la misma que la equacion (16), y que se deduce de la primera ó de la equacion (15), haciendo $h_{,}=0$, y $\tau =$ un ang. recto, resulta de la descomposicion inmediata del peso de las tierras en dos fuerzas solamente, la una perpendicular á la línea del talud, y la otra horizontal; las componentes horizontales se supone actúan en ámbos casos al tercio de la altura del muro, conforme á la explicacion que he dado antes, en la qual he observado que la tercera equacion, que coincide con la equacion (16), es idéntica á la que se obtendria en el caso de un fluido de la misma gravedad específica que las tierras.

Las diferencias características entre mi fórmula y las otras dos se hallan en el factor del término $\frac{\pi}{\Pi}$ baxo el radical: este factor, segun mi teoría, es

$$\frac{(h-h_{,})^2\left(h+\frac{1}{2}h_{,}\right)t^2}{3h}:$$

segun las teorías adoptadas por diversos Ingenieros

$$\frac{1}{3}h^2\,\text{sen.}^2\tau,\ \text{y}\ \frac{1}{3}h^2,$$

la cohesion y el rozamiento introducen en mi expresion las cantidades $h_{,}$ y t^2, las quales hacen ver de este modo sus efectos.

21 Las otras teorías no tienen la ventaja de poder estimar la influencia de la cohesion y del rozamiento en el empuje de las tierras: observaré relativamente á las aplicaciones que se pueden hacer de la mia, que ciertas tierras, en un estado de grande sequedad, pueden dar un valor de consideracion para $h_{,}$, lo que no las hace capaces sino de un corto empuje (siendo entonces muy pequeño el factor $h-h_{,}$), y que las mismas tierras, disueltas, hacen $h_{,}$ quasi nulo. Mis fórmulas darán siempre exâctamente el valor del empuje, en cada caso, substituyendo el número que conviene á $h_{,}$ para este caso; pero como es menester construir el muro en la hipótesis del mayor empuje de que sean capaces las tierras, se podrá despreciar h' en la práctica, y mi fórmula se transformará en

$$x = h\left\{-n \pm \sqrt{\left[\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\Pi}t^2 + n^2\right)\right]}\right\} \ldots\ldots (18):$$

baxo esta forma, solo difiere de la equacion (17), por la mutacion de $\text{sen.}^2\tau$ en t^2, ó $\text{tang.}^2\frac{1}{2}\tau$.

22 He supuesto, en quanto precede, que el paramento del muro, del lado de las tierras, era vertical; pero es muy fácil introducir en las fórmulas la consideracion de un talud doble: para esto, siendo n, como anteriormente, la relacion de la base á la altura del talud exterior, y n la relacion correspondiente para el talud interior (el del paramento contra el qual se apoyan las tierras), se tiene por el momento $A\Pi k$ de la estabilidad del muro la expresion

$$A\Pi k = \frac{1}{2}h\left\{x^2 + (2n + n_{,})hx + \left(\frac{2n^2}{3} + nn_{,} + \frac{1}{3}n_{,}^2\right)h^2\right\}\Pi \ldots (19),$$

la qual igualada al momento $\frac{1}{6}\pi(h-h_{,})^2\,(h+\frac{1}{2}h_{,})\,t^2$ del empuje de las tierras, da

$$x = -\left(n + \frac{1}{2}n_{,}\right)h \pm \sqrt{\left\{\frac{\pi t^2}{3\Pi h}(h-h_{,})^2\left(h + \frac{1}{2}h_{,}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots + \left(\frac{n^2}{3} - \frac{n_{,}^2}{12}\right)h^2\right\}} \ldots\ldots\ldots\ldots (20):$$

las equaciones correspondientes á la (17) y siguiente serán

$$x = h\left\{-\left(n + \frac{1}{2}n_{,}\right) \pm \sqrt{\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{\Pi}\text{sen.}^2\tau + \frac{1}{3}n^2 - \frac{1}{12}n_{,}^2\right]}\right\} \ldots (21),$$

$$x = h\left\{-\left(n + \frac{1}{2}n_{,}\right) \pm \sqrt{\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{\Pi} + \frac{1}{3}n^2 - \frac{1}{12}n_{,}^2\right]}\right\} \ldots\ldots\ldots (22).$$

23 Si se hace abstraccion de la cohesion, y que se supongan los taludes iguales de una y otra parte del muro, estas tres equaciones se reducirán á

$$x = h\left\{-\frac{3}{2}n \pm \sqrt{\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{\Pi}t^2 + \frac{1}{4}n^2\right)}\right\} \ldots\ldots (23),$$

$$x = h\left\{-\frac{3}{2}n \pm \sqrt{\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{\Pi}\,\text{sen.}^2\tau + \frac{1}{4}n^2\right)}\right\} \ldots\ldots (24),$$

$$x = h\left\{-\frac{3}{2}n \pm \sqrt{\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{\Pi} + \frac{1}{4}n^2\right)}\right\} \ldots\ldots (25).$$

24 La equacion (23) da, poco mas ó menos, por relacion entre el grueso medio y la altura del muro, la de 32:100; la equacion (25), que es la equacion (23), aplicada al caso de la fluidez, da una relacion un poco menor que la de 5:10, y corresponde al mayor grueso, como debe ser, puesto que se refiere al caso de la fluidez; y si se considera que quando las tierras estan expuestas á embeberse de agua, pueden hallarse disueltas en términos que su accion sea quasi comparable á la de los fluidos de iguales gravedades específicas que las de estas tierras, se verá que conviene emplear en muchos casos prácticos la equacion (23) tomada en su límite, esto es, puesta baxo la forma (25). Añadiré, que segun las relaciones comunmente adoptadas para los taludes de los muros, los términos, baxo el radical que contienen los quadrados de estas relaciones, influyen tan poco en el valor de x, que pueden despreciarse (*); y en conseqüencia de estas

(*) Para calcular del modo mas general el error que resulta de los términos despreciados baxo el radical, que contienen n y $n_{,}$, supongo en la equacion (20)

$$\frac{\pi t^2}{3\Pi h^3}(h-h_{,})^2\left(h+\frac{1}{2}h_{,}\right) = a,$$

$$\frac{n^2}{3} - \frac{n_{,}^2}{12} = \frac{(2n+n_{,})(2n-n_{,})}{12} = b,$$

y la equacion se reduce á

$$x = \left\{(a+b)^{\frac{1}{2}} - \left(n+\frac{1}{2}n_{,}\right)\right\}h;$$

$$x = h\left[\frac{1}{\sqrt{a}}\left(a+\frac{b}{2}-\frac{b^2}{8a}+\frac{b^3}{16.a^2}-\&c.\right)-\left(n+\frac{1}{2}n_{,}\right)\right]:$$

en los casos ordinarios de aplicacion, el valor del término $bh : 2\sqrt{a}$ será bastante

diferentes consideraciones, creo se puede emplear con ventaja la fórmula

$$x=\left\{\left(\frac{\pi}{3\Pi}\right)^{\frac{1}{2}}-n-\frac{1}{2}n_{,}\right\}h\ldots\ldots\ldots(26),$$

la qual en el caso de los dos taludes iguales se reduce á

$$x=\left\{\left(\frac{\pi}{3\Pi}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}n\right\}h\ldots\ldots\ldots(27),$$

y en el caso de un solo talud exterior

$$x=\left\{\left(\frac{\pi}{3\Pi}\right)^{\frac{1}{2}}-n\right\}h\ldots\ldots\ldots(28).$$

Se ha hecho uso hasta el dia de la equivalente á la fórmula (26); pero, como haré ver dentro de poco, se habia llegado á este resultado por medio de consideraciones indirectas, que no solo presentan una apariencia de arbitrariedad, sino tambien una peticion de principio; y no se habia hecho ver de qué modo se halla ligada con aquellas en las quales entran las cantidades relativas á la cohesion y al rozamiento, ó como estas últimas tienen por límite la equacion (26). Creo que este resultado y la ventaja de tener una teoría que encierra las principales circunstancias físicas de uno de los problemas mas importantes de la ciencia de un Ingeniero, parecerán dignas de atencion á los que se interesan en los progresos de esta ciencia.

pequeño para poderlo despreciar; y con mas razon los siguientes: luego se puede reducir esta equacion á esta forma muy sencilla

$$x=h\,(a^{\frac{1}{2}}-n-\frac{1}{2}n_{,});$$

y no obstante se podrán calcular siempre las cantidades que se han despreciado en el valor de x por medio de la equacion que contiene los términos de la serie (véase la instruccion que se halla á continuacion). La regla de cálculo, dada art. 26 de esta *instruccion*, es la evaluacion del término $\frac{bh}{2\sqrt{a}}$

Del caso en que la superficie superior del suelo está cargada de diferentes cuerpos, esparcidos sobre esta superficie segun la longitud del muro que sostiene el empuje de dichas tierras. Fórmulas para este caso, teniendo en consideracion el rozamiento y la cohesion. Reducciones que deben hacerse en los gruesos de los muros quando tienen parapetos.

25 En quanto precede se ha supuesto, que el empuje del muro resultaba únicamente del peso relativo de la porcion de tierra que tiende á separarse; pero puede suceder que la superficie superior del suelo esté cargada de diferentes cuerpos esparcidos sobre esta superficie segun la longitud del muro que sostiene el empuje: estos cuerpos son por lo comun losas, empedrados &c., agua contenida en un estanque ó receptáculo &c. Es menester tener en consideracion esta circunstancia, ó al menos hallarse en estado de determinar su influencia sobre las dimensiones de los muros, y hacer mas generales las expresiones precedentes del *empuje*, de la *suma de los momentos*, del *grueso del muro* &c.; pero se verá que generalizándolas de este modo, no las hago ni mas complicadas ni mas difíciles de calcular, y que aun obtengo la ventaja esencial de conservarles precisamente la misma forma, baxo la qual han sido dadas en las equaciones (8), (9), (10), (20) &c.

Considerando la presion que estos cuerpos producen, como distribuida uniformemente sobre la superficie superior de las tierras que tienden á derribar el muro: sea G el peso que sostiene una unidad de esta superficie, siendo BCE el ángulo ς; el esfuerzo vertical sobre BE (que debe agregarse al peso del perfil indeterminado BECB, que padece la presion superior G), será $Gh.\text{tang.}\varsigma$: introducida esta fuerza en la equacion (1), y la de Q ó $\frac{1}{2}\pi h^2\,\text{tang.}\varsigma$, vuelve á dar la equacion (4), sin mutacion alguna; pero introduce un término de mas en la equacion (5), y consiguientemente en la equacion (8), que se transforma en

$$P=\left\{\frac{1}{2}\pi\,(h-h_{,})+G\right\}ht^2:$$

si se introduce la equacion hipotética

$$h_{,,}=h_{,}-\frac{2G}{\pi}\,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,(29),$$

se tendrá para el valor de P

$$P=\frac{1}{2}\pi ht^2\,(h-h_{,,})\,\ldots\ldots\ldots\,(30),$$

equacion de la misma forma que la equacion (8), y cuyo cálculo no es sensiblemente mas largo, pues $h_{\prime\prime}$ no difiere de $h_{\prime}$ sino por la relacion $\frac{2G}{\pi}$.

Esta equacion (30), como la (8), contiene el caso de la fluidez; pues haciendo $h_{\prime}=0$ y $t=1$, se reduce á

$$P=h\left(\frac{1}{2}\pi h+G\right),$$

valor de la presion que produciria sobre BC un fluido cuya pesantez específica fuese π, y cuya superficie superior sufriese una presion G referida á la unidad de superficie.

26 *Fig. 1.* Por medio de la forma dada á la equacion (30) se obtienen con mucha facilidad los valores de la *suma de los momentos*, de la distancia al pie del muro, del punto de aplicacion de la resultante de las presiones elementales, del grueso del muro *en el cordon* &c., en el caso en que la superficie del suelo sufre una presion qualquiera: para tener estos valores basta mudar $h_{\prime}$ en $h_{\prime\prime}$ en todas las equaciones dadas anteriormente que les corresponden.

Por consiguiente, mudando $h_{\prime}$ en $h_{\prime\prime}$ en las equaciones (9) y (10), se tendrá

$$\text{momento del empuje total}=\frac{\pi t^2}{6}(h-h_{\prime\prime})^2\left(h+\frac{1}{2}h_{\prime\prime}\right)\ldots\ldots (31).$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Distancia del pie del}\\ \text{muro al punto de aplica-}\\ \text{cion de la resultante de los}\\ \text{empujes elementales}\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}=\frac{(h-h_{\prime\prime})\left(h+\frac{1}{2}h_{\prime\prime}\right)}{3h}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (32).$$

27 Sobre estos valores se puede hacer una observacion importante.

La equacion (31) proviene de la integral de la equacion

$$dM=\frac{1}{2}\pi t^2(h-z)(2z-h_{\prime\prime})dz\ldots\ldots\ldots (33)$$

tomada entre los límites convenientes, y en la qual M representa la suma de los momentos sobre la altura z. Esta equacion contiene como caso particular el de la fluidez perfecta; de modo que haciendo en ella $t=1$ y $h_{\prime}=0$ (como conviene al caso de los fluidos), lo que la reduce á $dM=(h-z)(\pi z+G)dz$; y tomando la integral desde $z=0$ á $z=h$, se tiene la suma de los momentos $\frac{1}{2}h^2\left(\frac{1}{3}\pi h+G\right)$, que se aplica rigurosamente á los fluidos.

Pero si se quiere tener el valor correspondiente para las tierras, es menester observar que la integral es C................................ $+\frac{1}{2}\pi t^2 \int[(h-z)(2z-h_{\prime\prime})dz]$, y que C se determina por la condicion que el empuje es nulo al mismo tiempo que la expresion $\frac{1}{2}\pi t^2 z(z-h')$, que la equacion (30) es la presion sobre la altura z, y se reduce á cero quando se hace $z=h_{\prime\prime}$; y esta condicion da $C=\frac{1}{12}\pi t^2 . h_{\prime\prime}^3$. Pero para que la segunda integral coincidiese con la primera quando se introducen en ella las condiciones de la perfecta fluidez, seria menester que C fuese una funcion de $h_{\prime}$, que se desvaneciese quando $h_{\prime}=0$; lo que no se verifica, puesto que esta suposicion da $h_{\prime\prime}=-\frac{2G}{\pi}$. Por consiguiente, aunque la equacion (31) ha sido deducida de las equaciones (33) y (30), las quales satisfacen ámbas al caso de la perfecta fluidez, ofrece no obstante un término que no pertenece á este caso, y es el término $-\frac{2}{3}.\frac{G^3}{\pi^2}$: pues haciendo en la equacion (31), $t=1$ y $h_{\prime}=0$, se tiene por momento...................... $\frac{1}{2}h^2\left(\frac{1}{3}\pi h+G\right)-\frac{2}{3}\frac{G^3}{\pi^2}$, en lugar de $\frac{1}{2}h^2\left(\frac{1}{3}\pi h+G\right)$, que se debe tener en el caso de la perfecta fluidez: este valor.............. $\frac{1}{2}h^2\left(\frac{1}{3}\pi h+G\right)$ es, como ya lo he hecho ver antes, el que da la equacion (33) quando se hace en ella $h_{\prime}=0$, y que se supone en uno de los límites de la integral $z=0$ y $M=0$, esto es, quando se introducen en ella las condiciones de la fluidez.

La anomalía que acabo de notar (y que solo tiene lugar en la equacion (31), puesto que todas las demas satisfacen rigurosamente al caso de la fluidez), proviene únicamente de que con el fin de obtener resultados aplicables á las construcciones, y obtener fórmulas analíticas, cuyo cálculo fuese practicable y cómodo, me he visto obligado á simplificar el estado de la qüestion por medio de hipótesis, que difieren un poco de los fenómenos reales; por exemplo la de considerar *à priori* la línea del talud como una línea recta. Estas simplificaciones no impiden el que las

dimensiones deducidas de las fórmulas anteriores puedan aplicarse con mucha ventaja á las construcciones: estas fórmulas son en un todo preferibles en la práctica á las que da la solucion rigurosa (daré en otra parte esta solucion), las quales, ademas del inconveniente de ser sumamente complicadas, estan fundadas sobre métodos analíticos, que no son familiares á todos los Ingenieros.

28 Por estas razones daré los valores que siguen, que son los que deberán emplearse quando se haga abstraccion de $h_{,}$, como conviene hacerlo en la práctica, y que solo se haga atencion al ángulo del talud de las tierras.

Momento del empuje total $= \frac{1}{2} t^2 h^2 \left(\frac{1}{3}\pi h + G\right)$ ...... (34).

Distancia del pie del muro al punto de aplicacion de la resultante de los empujes elementales............................ $= \frac{h\left(\frac{1}{3}\pi h + G\right)}{\pi h + 2G}$ .... (35).

Estas fórmulas, muy favorables á la solidez, se aplican á todos los ángulos de talud, y dan exâctamente los valores que convienen al caso de la fluidez.

29 Pasando ahora á la determinacion del grueso del muro en el cordon, se tiene, substituyendo en las equaciones (13) y (14) por A su valor $h[x + \frac{1}{2} h(n + n_{,})]$, por b su valor $x + (n + n_{,}) h$, por $A\Pi k$ su valor, equacion (19); y mudando despues $h_{,}$ en $h_{,,}$, los valores generales aplicables á los muros construidos con un talud exterior y otro interior.

Primer caso. El muro puede resbalar sobre su plataforma.................... x ....

$$= \frac{h\left[\frac{1}{2}\pi t^2 (h - h_{,,}) - (n + n_{,})\left(\frac{1}{2}\Pi q h + r\right)\right]}{\Pi q h + r} \text{ .... (36)}$$

Segundo caso. El muro puede girar sobre una de sus aristas inferiores......... $x =$ ....

$$-\left(n + \frac{1}{2} n_{,}\right) h \pm \sqrt{\left\{\frac{t^2 \pi}{3\Pi k}(h - h_{,,})^2 \left(h + \frac{1}{2} h_{,,}\right) + h^2\left(\frac{1}{3} n^2 - \frac{1}{12} n_{,}^2\right)\right\}} \text{ .. (37)}$$

30 La equacion (37) se simplifica quando se supone $h_{,}=0$, para favorecer la solidez; y que se introduce el valor del momento dado por la equacion (34), pues se transforma en

$$x=h\left\{-(n+\frac{1}{2}n_{,})\pm\sqrt{\left[\frac{t^2(\pi+\frac{3G}{h})}{3\Pi}+\frac{1}{3}n^2-\frac{1}{12}n_{,}^2\right]}\right\}\ldots(38):$$

baxo esta forma debe emplearse en la práctica: tambien se puede suprimir n y $n_{,}$ baxo el radical, como lo he hecho ver antes, y en este caso se tendrá

$$x=h\left\{-(n+\frac{1}{2}n_{,})\pm t\sqrt{\left(\frac{(\pi+\frac{3G}{h})}{3\Pi}\right)}\right\}\ldots\ldots(39):$$

y quando las tierras se hallen de tal modo disueltas que se puedan mirar como fluidas, se hará $t=1$; lo que dará

$$x=h\left\{-(n+\frac{1}{2}n_{,})\pm\sqrt{\left(\frac{(\pi+\frac{3G}{h})}{3\Pi}\right)}\right\}\ldots\ldots(40).$$

31 Por medio de estas fórmulas se puede tener en consideracion la carga superior del terreno que tiende á derribar el muro, sin que resulte un cálculo sensiblemente mas complicado. Conviene completar esta parte de mis investigaciones, determinando las dimensiones del muro, en la hipótesis de la construccion de un parapeto.

Si llamamos a la altura del parapeto, y b su espesor, su peso será representado por Πab, y su momento será igual á........ $\Pi ab\left(\frac{1}{2}b+nh\right)$; por consiguiente es menester añadir la cantidad Πqab al primer miembro de la equacion (13), y el valor del momento al primer miembro de la equacion (14), para tener los gruesos que convienen á los casos á que se refieren estas equaciones.

Pero será mas fácil y mas cómodo calcular primero el grueso en el cordon, como si no hubiese parapeto, y evaluar despues separadamente la disminucion del grueso correspondiente al peso de este parapeto: de este modo se consigue la ventaja de conocer la influencia de este peso sobre las dimensiones del muro, y de no tenerla en cuenta sino en quanto se juzgue conveniente. Sea $\tau=nh$, $\tau_{,}=n_{,}h$ (estos son los valores absolutos y totales de los taludes en toda la altura del muro), y $B=$ al grueso de la

base del muro, calculado en la hipótesis de poder girar sobre una de sus aristas, y siñ tener en consideracion el parapeto, se podrá calcular la disminucion que debe de darse al grueso, así en el cordon como en la base, por causa del parapeto, por medio de la fórmula siguiente:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Disminucion del grueso del}\\ \text{muro por causa del parapeto...}\end{array}\right\}=\frac{ab\left(\frac{1}{2}b+\tau\right)}{h\left(B-\frac{1}{2}\tau'\right)}.$$

La regla del cálculo dada art. 25 de la instruccion práctica es la tradüccion de esta fórmula.

Ilustraciones sobre la teoría precedente, considerada baxo el punto de vista el mas general.

32 Concluiré la parte analítica de esta memoria por algunas ilustraciones propias para facilitar á los discípulos la investigacion de la verdadera significacion de las fórmulas quando se les da el sentido mas extenso de que son capaces. Los que solo tienen por objeto la construccion, podrán dispensarse de leer lo que sigue, y pasar inmediatamente al art. 33, donde se hallan la exposicion y el uso de *un método gráfico* para resolver, sin cálculo, los principales problemas relativos á la forma y á las dimensiones de los muros destinados á sostener el empuje de las tierras.

De la generalidad de la lengua algebráica resulta, que la análisis de un problema da no solamente los resultados que se necesitan para la qüestion particular de que se trata, sino los que pueden aplicarse á otras qüestiones unidas con esta, y cuya dependencia se ve claramente quando se hace abstraccion de ciertas circunstancias físicas. Así, en el caso presente se quiere encontrar una cantidad x que depende de otras cantidades h, $h_{\prime}$, n, $n_{\prime}$, t, y segun el objeto particular de aplicacion de que se trata, las equaciones que establecen las relaciones entre estas cantidades no deben servir sino para los valores de h que son mayores que $h_{\prime}$. En efecto, hemos visto que las fórmulas dan los valores que convienen á la práctica de las construcciones, desde $h=h_{\prime}$, hasta $h=h+\Omega$ (siendo Ω una cantidad positiva qualquiera). Pero estas equaciones entre x, h, h' &c. pueden ser consideradas en toda la extension de su acepcion, y sin hacer atencion á las circunstancias físicas que limitan su aplicacion; lo que equivale á decir que las cantidades x. h &c. pueden variar en estas equaciones,

siguiendo la ley de continuidad, y recibir todos los valores imaginables: habrá una infinidad de estos valores simultáneos, que no pertenecerán al caso de que se trata, ó que solo tienen con él relaciones cuyo exámen puede ser útil como exercicio del entendimiento, aunque no interesen á la práctica.

Para aplicar estas reflexîones generales á nuestro problema del empuje de las tierras observo que pudiéndose excavar las tierras coherentes hasta una cierta altura h', sin que se desmoronen; y habiendo introducido esta condicion en la análisis, si en la expresion analítica del empuje horizontal se hace la altura del muro $h = h_{\prime}$, se debe hallar un empuje nulo; y en efecto, esto es lo que sucede quando se efectua esta substitucion en la equacion (8). Este caso no presenta la menor dificultad; pero algunos se hallarian embarazados para saber lo que significa el valor negativo del empuje que resulta quando se supone $h < h_{\prime}$ en la equacion (8): he aquí lo que representa este valor.

Las tierras excavadas en toda la altura $h_{\prime}$ se hallan en equilibrio, esto es, que su peso se halla contrarestado por la cohesion y el rozamiento; y si pudiesen mantenerse en este estado, no necesitarian de muro que las sostuviese; pero una fuerza qualquiera, tan pequeña como se quiera, puede romper el equilibrio, y determinar una línea ó una superficie de rotura; de modo que en este estado de pasar del reposo al movimiento, el menor peso de que se cargase la superficie de las tierras produciria un empuje.

Si estas mismas tierras se hallan excavadas hasta una altura menor que h', con mas razon impedirán la cohesion y el rozamiento que se desprendiesen; pero este caso difiere del anterior en que la línea ó superficie de rotura no puede ser producida por una fuerza qualquiera muy pequeña, sino que aun para tener un principio de empuje seria menester que al peso del prisma de tierra contiguo al muro se agregase una fuerza de valor finito y determinado. La cantidad $\frac{1}{2}\pi h(h - h_{\prime})t^2$, quando es negativa, tiene un valor que depende del de esta fuerza; y sin recurrir á la hipótesis de una especie de atraccion entre las tierras y el muro, se podria mirar un empuje negativo como indicando una fuerza que falta al sistema, y que seria menester agregarla á las que ya actúan sobre el sistema, para que el muro empezase á ser empujado, determinándose esta fuerza en todos casos por medio del valor negativo del empuje.

Pero la análisis del problema ofrece aun otras particularidades que explicar: así, por exemplo, el momento del empuje ho-

rizontal es siempre positivo, qualquiera que sea el signo de este empuje, el grueso x en el cordon tiene valores nulos ó negativos en ciertos límites, fuera de los quales es siempre positivo aun quando el empuje no lo es &c. Para referir con claridad estos diferentes resultados de la análisis á los casos de equilibrio que les conviene, es neceserio mirar las cosas baxo un punto de vista mas general: para esto se considerará el muro como una masa que tiende á girar, en virtud de su pesantez, al rededor de un exe horizontal, y que se trata de impedir la rotacion por medio de fuerzas horizontales elementales aplicadas á cada uno de los puntos de una línea ó superficie vertical tomada sobre este cuerpo; siendo el valor de una qualquiera de estas fuerzas de la forma $A\{\pm 2h \mp h_{,}\} dh$; se mirarán ademas el rozamiento y la cohesion como fuerzas activas capaces de comunicar movimiento á una masa, y no como resistencias inertes; y entonces los resultados de la análisis no presentarán ninguna dificultad, y se hallarán perfectamente ligados entre sí. Se hallará, segun la forma del sistema y los valores respectivos de las fuerzas que actuan sobre el cuerpo grave sujeto á girar al rededor de un exe horizontal, que en ciertos casos (aquel en que $h > h_{,}$, al qual se refieren todos aquellos de que se ocupan los prácticos) el punto de aplicacion de la resultante horizontal de todas estas fuerzas se halla encima del exe horizontal de rotacion: en los casos contrarios esta resultante horizontal muda de signo; pero su punto de aplicacion está baxo el exe de rotacion; por consiguiente el signo del momento es siempre el mismo, y en ámbos casos la pesantez tiende á hacer girar el cuerpo al rededor del exe horizontal en la misma direccion. Segun esto, teniendo h un valor finito y constante, el momento de la resultante de las fuerzas horizontales puede variar desde cero hasta el infinito, siendo los valores correspondientes y extremos de h; $h = h_{,}$ y $h =$ *infinito positivo*; y la misma variacion se verifica en la misma direccion desde $h_{,} = h$, hasta $h_{,} =$ *infinito positivo*; teniendo h un valor finito y constante (se puede observar que $h_{,} =$ *infinito* corresponde al caso en que las tierras son tan consistentes, que se las puede cortar á una altura qualquiera sin que se desmoronen). Por consiguiente se pueden hallar para x dos series de valores positivos que crecen al infinito; la una que corresponde á $h > h_{,}$, y la otra á $h_{,} > h$; pero los objetos de aplicacion que nos hemos propuesto en esta memoria abrazan únicamente la primera serie de estos valores; y la otra depende de consideraciones abstractas de equilibrio á que se hallan ligadas estas aplicaciones.

Tambien pueden ser los valores de x ó negativos (supongo que se toma siempre el radical que hace parte de estos valores con el signo positivo), ó imaginarios quando n y $n_{,}$ tienen ciertos valores determinados *à priori*; y se halla aun la razon en las consideraciones abstractas del equilibrio. En efecto, debiendo ser nulo el momento de estabilidad quando $h = h_{,}$, y siendo el valor riguroso de este momento

$$\frac{1}{2}\Pi h\left[x^2 + (2n + n_{,})hx + \left(\frac{2n^2}{3} + nn_{,} + \frac{1}{3}n_{,}^2\right)h^2\right],$$

es evidente que ningun valor positivo de x puede reducir esta expresion á cero; y como $x^2 + (2n + n_{,})\,hx$ deberá ser un número negativo, siempre que el valor del momento del empuje horizontal de las tierras, dividido por $\frac{1}{2}\Pi h$, sea menor que...... $\left(\frac{2n^2}{3} + nn + \frac{1}{3}n_{,}^2\right)h^2$, se tendrán hasta un cierto límite valores de h mas grandes que $h_{,}$, que harán x negativo.

El caso de $x = 0$ se refiere á aquel en que el equilibrio exîgiria que el perfil del muro fuese un triángulo; y como llamando x' el grueso de la base del muro se tiene en general $x' = x + h(n + n_{,})$, la base del triángulo seria $h\,(n + n_{,})$.

En el caso de $x = 0$, el momento de este perfil triangular es

$$\frac{1}{2}\Pi h^3\left(\frac{2n^2}{3} + nn_{,} + \frac{1}{3}n_{,}^2\right).$$

Pero quando el momento del empuje horizontal de las tierras es menor que este último valor (se habla siempre en la suposicion que h, n y $n_{,}$ tienen valores determinados), entonces el perfil *teórico*, correspondiente al valor negativo de x, se compone de dos triángulos opuestos al vértice; y si se quiere mudar la forma de este perfil (permaneciendo el empuje horizontal el mismo), sin cesar de satisfacer á las equaciones del equilibrio, es menester dar otros valores á n y $n_{,}$, que se pueden hallar tomando estas cantidades por incógnitas, y determinándolos de modo que sean comparables con el valor positivo de x.

El caso general de los dos triángulos opuestos por sus vértices tiene, como acabamos de ver, por uno de sus límites el caso particular en que el momento del empuje de las tierras................ $= \frac{1}{2}\Pi h^3\left(\frac{2n^2}{3} + nn_{,} + \frac{1}{3}n_{,}^2\right)$, que, haciendo $x = 0$, hace des

aparecer el triángulo superior. Si el valor del momento total del empuje de las tierras fuese $\frac{1}{6}\Pi h^3(n_{,}^2-n^2)$, lo que daria $x=-h(n-n_{,})$, se tendria otro límite, aquel en que desaparece el triángulo inferior, y en el que el perfil *teórico* del muro es un solo triángulo apoyado sobre su vértice.

Los valores imaginarios de x dependen de los de $n_{,}$; y se ve fácilmente que podria darse un talud del lado de las tierras, tal que sobre una altura determinada h ninguna forma de perfil del muro estableciese, conservando este talud, la igualdad numérica entre el momento de estabilidad de este muro y el del empuje horizontal de las tierras. No entraré en mas detalles sobre estas consideraciones abstractas, que, como previne, son simplemente exercicios del entendimiento. Ademas, las especies de excepciones á que dan lugar desaparecen todas en el momento que se hace abstraccion de la cohesion, como conviene en la práctica; y que los quadrados n^2 y $n_{,}^2$ tienen valores tales, que se pueden despreciar baxo el radical.

Paso á la descripcion de un método gráfico, por medio del qual los obreros podrán poner en práctica toda la teoría analítica que hemos expuesto, sin ningun cálculo y con la mayor facilidad.

Método gráfico para resolver, sin cálculo, los principales próblemas relativos á la forma y á las dimensiones de los muros que sostienen el empuje de las tierras. Uso de este método.

33 Constrúyase un paralelógramo rectángulo ABCD, tal que dividida AD en 100 partes, AB contenga 55 de ellas; tómese AE igual á 30, y AF igual á 45 de estas mismas partes.

Divídase AE, que yo llamo *línea del talud de los muros*, en 60 partes; FB, que yo llamo *línea de las pesanteces específicas*, en 30 partes; y desde cada uno de los puntos de division tírense líneas rectas al punto D.

Numérense: 1.º las divisiones de AE desde 1 hasta 30, tomando dos divisiones para cada número: 2.º las divisiones de FB, poniendo el número 60 en el punto F, y los números 61, 62 &c. en los puntos que siguen, hasta B que señalará el núm. 90.

La figura en este estado puede servir para trazar los perfiles de los muros, quando las tierras que sostienen se hallan en el caso de poder aumentar de volúmen, ó de ser extremamente diueltas por el agua; y ya he dicho que en muchos casos de prác-

tica convenia adoptar esta hipótesis, sacrificándolo todo en favor de la mayor solidez. Pero si se está asegurado de que ninguna de las mutaciones que pueden sufrir las tierras mudará su talud natural sino hasta cierto término determinado, en este caso se podrán disminuir los gruesos por una regla, cuya execucion gráfica está fundada sobre lo que vamos á trazar.

Hágase TC = FB, y divídase del mismo modo; descríbanse arcos concéntricos, terminados en las líneas DC y DA, cuyo centro comun sea D, y cuyos radios se terminen en las divisiones de TC. Divídase el arco CH en 90 partes iguales; tírense en el ángulo BDC, por los puntos de division del quarto de círculo CH y por el centro D, rectas prolongadas hasta la línea CB. Es menester observar que todas las prolongaciones comprehendidas en el quadrilátero BH'*h*NB son únicamente líneas de construccion, que podrán trazarse solamente de lápiz.

Se pondrán números en las divisiones del quarto de círculo sobre el arco interior KT, empezando por T, y al lado de cada division se escribirá el número de centésimas ó de milésimas partes de DC, que contiene la parte de la línea CB comprehendida entre el punto C y la prolongacion del radio que pasa por el punto de division correspondiente del quarto de círculo.

Si se da á AD cosa de media vara de largo, que es muy buena proporcion para la exâctitud, cada centésima parte de DC será $\frac{11}{4000}$ de vara; y con una escala dividida por *transversales* se tendrán con facilidad las milésimas partes de DC. Por consiguiente se estimarán con facilidad con el compas los números que deben escribirse sobre TK (*).

(*) No obstante, esta estimacion no es sino para los obreros, que no tienen ningun conocimiento teórico de geometría ni de cálculo: los Ingenieros echarán de ver al instante que estos números son las tangentes tabulares de los ángulos señalados sobre TK. Los logaritmos de estas tangentes, referidas á la nueva division decimal del quarto de círculo, se hallan en las tablas de *Callet* y en las de *Borda*; se hallan inmediatamente en números naturales en las excelentes tablas publicadas en Berlin por *Hobert* é *Ideler*.

En lugar de dividir TK en arcos iguales, se puede dividir CB en partes iguales, lo que equivale á hacer crecer las tangentes en progresion aritmética; en este caso, despues de haber tirado desde los puntos de division líneas rectas al centro D, se señalarán las divisiones de TK, sea por medio de un *transportador*, sea por medio de las tablas que hemos citado. Daré tablas particulares de los números que deben indicarse sobre las divisiones de CH en uno y en el otro caso.

Para concluir con quanto pertenece á las divisiones, observaré que las divisiones iguales de FB no deben corresponder rigurosamente á los números en progresion aritmética 60, 61, 62 &c.; pero el error que resulta es tan pequeño, que no solamente no es apreciable gráficamente, sino que aun es absolutamente despreciable,

Finalmente, desde N, extremo de la línea DN, que hace con DC un semiángulo recto, se escribirán números sobre las divisiones de NC, correspondientes á los puntos de concurso de esta línea y de las prolongaciones de los radios del arco C*h*. Estos números serán los que estan escritos sobre las divisiones del arco C*h*, tomados de dos en dos, esto es, que siendo estos últimos números 0, 17, 35, 52, 70, 87 &c. (en la hipótesis de que KT esté dividido en partes iguales) los números escritos sobre las divisiones de NC, empezando por N, serán 0, 35, 70 &c.

Todo quanto llevamos trazado no da aun sino relaciones, para obtener longitudes absolutas, se trazarán á cada lado de la figura cinco líneas paralelas é iguales á AD; una de estas líneas será una escala de 36 varas; y las otras quatro escalas de 24, 9, 6 y 3 varas. En cada operacion se podrá elegir entre las escalas una que contenga un número suficiente de varas para que la altura del muro pueda ser contenida en ellas, y dicha escala podrá ser la que se quiera; pero una vez adoptada, será la única de que se haga uso durante toda la operacion.

Nótese que las divisiones de las líneas FB y TC comprehenden las relaciones entre las gravedades específicas de las tierras y la mampostería desde $\frac{60}{100}$ ó $\frac{3}{5}$ hasta $\frac{90}{100}$ ó $\frac{9}{10}$: serán muy raros los casos en que sea necesario salir de estos límites. No obs-

empleando el cálculo. Para hacerlo ver, observaré que $300 . x$, representando uno de los números 60, 61, 62 &c., y y la distancia de uno de los puntos de division de FB al punto A, se tiene $y = \sqrt{x}$ para la relacion entre y y x: la figura da en lugar de esta relacion esta otra $y = \alpha + \beta x$, en la qual $\alpha = 0{,}24619$, y $\beta = 1{,}0051$. Las dos equaciones concuerdan en los dos límites de las relaciones de las gravedades específicas, límites en que se tiene $x = 0{,}2$, y $x = 0{,}3$, y difieren en los valores intermedios de x. Se determinará el *maximum* de la diferencia haciendo $dy = \beta dx$ en la equacion $y = \sqrt{x}$, de donde se saca $y = \frac{1}{2\beta}$, $x = \frac{1}{4\beta^2}$; y estos valores dan, sea entre las dos y para una misma x, sea entre las dos x para una misma y, el *maximum* comun de diferencia 0,0025 ó $\frac{1}{400}$. Es evidente que en la práctica $\frac{1}{400}$ de mas ó de menos en la relacion de las gravedades específicas de las tierras y mampostería, seria una consideracion absolutamente superflua.

La construccion gráfica rigurosa de las divisiones de FB se determina por medio de una parábola, que tiene AD por exe, el qual se halla en la prolongacion superior de DA, á una distancia de $A = \frac{1}{5}AD$, y cuyo paramento $= AD$. Pero la parte de esta curva comprehendida en el ángulo ABC es sensiblemente una recta, que pasa por F, y forma con AB un ángulo igual á la mitad del recto.

tante, si ocurriesen estos casos, ó si se quisiese aplicar la fórmula á algunos casos hipotéticos, bastaria prolongar las divisiones de FB, sea en la direccion de FA, sea mas allá de B respecto á F, y poner á las nuevas divisiones los números que les correspondiese relativamente á las que se hallan entre F y B. Se haria respecto á los números menores que 60, y mayores que 90, absolutamente lo mismo que lo que se ha hecho con los que se hallan entre 60 y 90; y los resultados aplicables, desde 40 ó 50 hasta 120 ó 130, tendrian toda la exâctitud necesaria para la práctica.

Conviene construir la figura ó *formula gráfica*, que acabo de describir, sobre un carton fuerte y terso para que sea mas durable: he aquí cómo debe hacerse uso de ella para suplir á las fórmulas analíticas en la determinacion de las dimensiones de los muros que sostienen empujes.

34 Supongamos que se quiera construir un muro de 20 varas de altura, con un talud de 8 centésimos de vara por cada vara de altura, de un solo lado, para sostener tierras de las quales una vara cúbica pesa $\frac{77}{100}$ de una vara cúbica de mampostería, y que movidas recientemente, toman un talud cuya altura sea los $\frac{44}{100}$ de la base.

Tomo sobre la escala de 24 varas una longitud Dh, que representa 20 varas, y trazo ligeramente con el lápiz una línea hk paralela á DC (*), la parte $e''f'$, comprehendida entre De que corresponde al talud 8, sobre la division de AE y DF que corresponde al número 77 sobre FB, será el grueso del muro en el cordon; tirando despues f'G perpendicular sobre DC, el trapecio D$e''f'$G será el perfil transversal del muro que se quiere construir.

Si el muro debiese tener de cada lado un talud de 8 centésimos, despues de haber tirado la línea hk, se tendria para el grueso del muro en el cordon la línea $e'''f'$, cuyo punto e''' se halla sobre la línea De' que corresponde al número 8, mas la mitad de 8, esto es, al número 12 de la division de la línea AE. Por este punto e''' se tiraria $e'''d$ paralela á la línea e''D, que se termina en el número 8 de la division de AE; llevando entonces he'' de G á d, el trapecio $de'''f'd'$ será el perfil transversal del muro que debe construirse.

(*) Para no maltratar la figura será mejor hacer todas estas operaciones sobre un papel transparente, que se aplicará sobre la figura.

En general, el extremo posterior f' de la línea superior del perfil se toma sobre la línea Df que corresponde á la relacion de las pesanteces específicas; en quanto al extremo anterior, si no hay mas que un talud, se toma sobre la línea De que corresponde al número que señala este talud sobre la division de AE; y si hay dos taludes iguales, se toma sobre una línea De', que corresponde á vez y media el número que señala el talud sobre la misma division de AE en las intersecciones de estas líneas y de hk.

Supongamos ahora que se quieran dar al muro dos taludes diferentes, el uno exterior de 12 centésimos, y el otro interior de 6 centésimos. Se tendrá siempre el extremo posterior de la línea superior del perfil en f' sobre la línea Df correspondiente á la relacion $\frac{77}{100}$ de las gravedades específicas: para hallar despues el extremo anterior de esta línea, se tomará sobre hk el punto e'''' correspondiente al número que señala 12 mas la mitad de 6, esto es, 15 de la division de AE. De este modo se tendrá el grueso $e''''f'$ del cordon; y por medio de los taludes dados, que se tomarán con el compas desde h hasta las líneas correspondientes á estos taludes entre h y e'''', se construirá el perfil del muro. Lo único que debe tenerse presente es que el extremo anterior e'''' se halla en la interseccion de hk y de la línea de talud, cuyo número es igual al número de centésimas partes que indica el talud exterior, mas la mitad del que indica el talud interior: el punto f' se determina como en el caso anterior.

Se pueden aplicar estas construcciones, como he dicho, á muchos casos prácticos, puesto que suponiendo el muro fundado y construido segun todas las reglas del arte, dan dimensiones que pueden emplearse con seguridad. Si se quieren ahora conocer las reducciones de los gruesos que resultan de las consideraciones físicas de que he hablado antes, se hará lo siguiente.

Por las divisiones de TC, que corresponden á la relacion de las gravedades específicas, tírese una paralela á CB; trácese luego otra línea que pase por D y se termine en la division de NC, sobre la qual se halla el número de milésimas partes de la base del talud que contiene su altura, ya sea que este número sea dado inmediatamente, ya sea se deduzca del ángulo formado por la línea del talud natural de las tierras y por el horizonte (buscando el valor de este ángulo dado en grados, sea sobre el quarto de círculo TK, sea en la segunda tabla que se halla al fin de la memoria, al lado de este valor se hallará el número que indica quantas milésimas partes de la base contiene la altura del talud): estas dos

líneas son gQ y DX en el exemplo dado anteriormente, y se cortan en Q: llévese gQ desde A hasta q sobre AB, y tírese la línea qD: el punto f'' en que encuentra hk será el extremo posterior de la línea superior del perfil del muro; el extremo anterior de esta línea se determinará como anteriormente.

Si se quieren los gruesos dados por la equacion (21) y sus derivadas, se tirará un radio DR desde el centro D al punto de division del quarto de círculo CH que corresponde al ángulo formado por la línea del talud y por el horizonte, ó al número que indica sobre el quarto de círculo TK quantas milésimas partes de la base contiene la altura del talud natural de las tierras; de la interseccion x de este radio, con el círculo concéntrico que se termina sobre TC en el número que indica la relacion entre las gravedades específicas, se baxará sobre DC una perpendicular xr, y la distancia de D al extremo de esta perpendicular (es Dr en el exemplo) se llevará desde A hasta i sobre AB: se trazará la línea iD, y su interseccion f''' con hk dará el extremo posterior de la línea superior del perfil; el extremo anterior de esta línea se determina siempre del mismo modo que anteriormente.

35 Solo queda una palabra que añadir á lo que llevamos dicho, para indicar cómo se aplica la *fórmula gráfica* al caso en que la superficie superior del suelo se halla cargada de un peso distribuido uniformemente sobre todas las partes de esta superficie, como lo estaria por losas, escarpas, empedrado &c. Este caso no aumenta dificultad alguna en las construcciones precedentes, ni las altera en nada; no exîge otra cosa sino la atencion de substituir á la relacion de π á Π la de $\pi + \frac{3G}{h}$ á Π. Un exemplo aclarará esto, y servirá de explicacion completa á los simples prácticos: supongamos que para un muro cuya altura debe ser de 10 varas, las tierras pesan 1500 libras por vara cúbica, la mampostería 1875 libras, y que la superficie superior del terreno se halle cargada de $312\frac{1}{2}$ libras por vara quadrada: haciendo como antes se hubiera buscado el número de centésimos contenido en $\frac{1500}{1875}$, que es 80, y se hubiera empleado la division nº 80 de FB ó de GC; pero en el caso de que cada vara quadrada de la superficie del terreno sostenga $312\frac{1}{2}$ libras, es menester dividir el triplo da este peso, ó 937,5, por el número 10 de varas que contiene la altura del muro, agregar el cociente 93,75 á 1500, y buscar quántas centésimas hay en $\frac{1593,75}{1875}$, se hallará que hay 85, y se em-

que está el plano del talud. Por consiguiente, para hallar un empuje es preciso, ó suponer que estas *capas* ú *hojas* no producen ningun rozamiento las unas contra las otras, ó suponerlas un rozamiento deducido de algunas experiencias sobre los cuerpos duros que resbalan sobre estos planos inclinados. La primera suposicion conduce al mismo resultado que el caso de una masa contínua, de que hablaré al instante; y observo que la segunda ofrece una nueva contradiccion, pues en el momento que se asigna un talud natural á las tierras, no puede hacerse otra suposicion sobre el rozamiento, sino la que resulta de este talud. Supongamos, por exemplo, que la inclinacion del talud de las tierras movidas nuevamente sea la mitad de un ángulo recto: esto nos indica que la resistencia producida por el rozamiento de las moléculas de tierra, que tenderian á resbalar sobre otras moléculas inferiores, es igual á la presion normal con que las primeras actúan sobre las últimas: por consiguiente no se puede ya suponer sin contradiccion que el rozamiento sea el tercio, el quarto &c. de la presion normal.

Si, para evitar el embarazo de la consideracion de una *masa divisible*, se mira el prisma de tierra que empuja como un cuerpo duro puesto sobre el plano del talud, entonces se le supondrá el rozamiento que corresponde á este talud (la relacion entre este rozamiento y la presion es igual á la tangente del ángulo de inclinacion del talud sobre el horizonte, siendo el radio $=1$), y el resultado será que no produce empuje alguno; ó se hará otra suposicion sobre el rozamiento, y se introducirán en la qüestion datos contradictorios; ó se supondrá finalmente que no hay rozamiento, y entonces poco importa el considerar un cuerpo duro, ó un sistema de *capas* ú *hojas* puestas las unas sobre las otras, paralelas al plano del talud.

Es muy extraño que aun en esta suposicion se introduzca el empuje horizontal de un modo inexâcto en fórmulas de que se hace uso tan freqüentemente. En efecto, muchos Ingenieros han buscado, como ya he dicho, la expresion de este empuje (mirando el prisma de tierra que empuja como un cuerpo duro que resbala sobre el plano del talud), descomponiendo primero el peso del prisma en dos fuerzas, la una perpendicular, y la otra paralela al plano del talud; y descomponiendo luego la última en una vertical que se desprecia, y una horizontal que se mira como la potencia á que debe hacer equilibrio el muro por su resistencia, y que actúa á la tercera parte de la altura de dicho muro. La mas pequeña atencion basta para echar de ver que el cuerpo cuyo pe-

pleará la division 85 de FB ó de TC, como anteriormente se hubiera empleado la division 80.

36 No digo nada sobre el caso en que se levanta un parapeto encima del muro; entonces el mejor partido que puede tomarse, es de hacerlo primero, sin atender al parapeto, por los métodos explicados anteriormente; y para hallar las reducciones de los gruesos debidos al peso de este parapeto, emplear despues el cálculo aritmético muy fácil, indicado en el art. 25 de la *instruccion práctica*, y cuya fórmula se dió art. 32 de esta memoria.

Observaciones sobre los principios que sirven de fundamento á diferentes soluciones del problema del empuje de las tierras, publicadas hasta el dia de hoy.

37 La construccion y el uso de mi *fórmula gráfica*, como se ve, será fácilmente entendida y practicada por los obreros menos habituados á trazar líneas, tales como los *aparejadores*, los *carpinteros* &c.: los dibuxos mas fáciles que estan habituados á hacer ofrecen mas dificultad que los que hemos descrito. Espero que los Ingenieros verán con gusto *métodos prácticos* establecidos sobre una teoría tan rigurosa, quanto puede permitirlo la naturaleza de la qüestion y la necesidad de obtener resultados que sean susceptibles de aplicacion, ventaja de que no gozan muchas de las teorías que se hallan en obras muy estimables por lo que hace á lo demas. En efecto, exceptuando Coulomb, cuya memoria parece no se ha consultado bastante, los que han querido considerar el prisma de tierra que produce el *empuje* como una masa divisible, ó *sistema de forma variable*, no han aplicado á la investigacion de las condiciones de su equilibrio los principios de Mecánica que dan estas condiciones. En general, sus hipótesis se reducen á mirar la masa que empuja el muro como compuesta de *capas* ú *hojas* puestas las unas sobre las otras, todas paralelas al plano de los mayores taludes que pueden tomar las tierras; pero este modo de descomponer la masa se halla en contradiccion con el resultado á que se desea llegar, que es la evaluacion del *empuje*, pues una qualquiera de estas *capas* ú *hojas* puesta sobre un plano paralelo al del talud, y rozando sobre este plano, como lo hace sobre las tierras inferiores, no tendria tendencia alguna á baxar ni á empujar, puesto que la inclinacion del plano del talud es precisamente aquella sobre la qual, á causa del rozamiento, se hallan en equilibrio las moléculas de tierra, y no pueden moverse sino sobre un plano, que está mas próxîmo al vertical, que lo

so se ha dividido de este modo en tres fuerzas, no se hallaria de modo alguno en equilibrio si se le quisiese retener sobre el plano del talud con la fuerza horizontal, á la qual se quiere oponer la resistencia del muro, pues la fuerza vertical que se ha despreciado, descompuesta en dos, la una perpendicular al talud, la otra horizontal, tendria en esta direccion una accion que romperia el equilibrio. A veces se mira esta fuerza vertical como empleada en aumentar la estabilidad del muro; pero para esto no es menester obtenerlo á costa de la fuerza horizontal, y en otra ocasion daré el verdadero modo de considerar la accion vertical de las tierras, relativamente al efecto de que acabo de hablar: no obstante, estas inexâctitudes no impiden que á causa del rozamiento, cohesion &c., las dimensiones, deducidas de este modo de resolver el problema, no sean admisibles en una infinidad de casos.

El método directo y riguroso de hallar el valor del empuje horizontal, considerando siempre el plano del talud como aquel sobre el qual tiende á resbalar sin rozamiento el cuerpo que empuja, es descomponer inmediatamente el peso de este cuerpo en dos fuerzas, la una perpendicular al plano del talud, y la otra horizontal; siendo esta el empuje total que padece el muro: es lo que han hecho muchos Ingenieros, y han obtenido un empuje, que es independiente de la inclinacion del talud, y da (en la hipótesis de que el muro puede caer girando al rededor de una de sus aristas inferiores, y de que la resultante de las presiones horizontales actúa á la tercera parte de la altura del muro) resultados conformes á los de la equacion (22). Las dimensiones que se deducen estan (como he hecho ver) establecidas para el caso del *maxîmum* de resistencia; y los constructores no deben separarse de dichos resultados sin la mayor circunspeccion.

Hemos visto antes de qué modo la equacion (22) se deriva de aquellas en que entran la cohesion y el rozamiento, y como encierra la condicion de que estos dos obstáculos que se oponen al empuje han padecido todas las disminuciones de que son susceptibles. Tambien se ha determinado el punto de aplicacion de la resultante de un modo general; y se ha hecho ver el caso en que su posicion coincide con la que se le asigna ordinariamente: posicion de que no habian dado una razon satisfactoria los Ingenieros que la habian adoptado. Por consiguiente es claro, que aunque se hubiese ya hecho uso de los valores $\frac{1}{2}\pi h^2$ y $\frac{1}{3}h$, se habian obtenido por medio de raciocinios que de ningun modo manifestaban el orígen, ni hacian conocer de qué modo estos va-

lores eran los *límites* de aquellos en que se introducen las circunstancias físicas del problema. La historia de las ciencias ofrece algunos exemplos de resultados verdaderos deducidos de este modo de teorías empíricas; pero regularmente los resultados así deducidos necesitan ser modificados por la experiencia, y dispuestos de modo que no resulte inconveniente alguno en la aplicacion. Valdria mas, quando los objetos de investigacion presentan grandes dificultades para ser tratados analíticamente, ceñirse en el principio á reglas prácticas fundadas sobre la observacion, hasta que los progresos de las ciencias físicas ó matemáticas ofreciesen nuevos recursos para hallar las leyes de estos fenómenos, y dar razon de los hechos; pues explicaciones incompletas y fórmulas establecidas sobre principios equívocos pueden, hallándose acreditadas, hacer cometer grandes errores á los que demasiado ocupados en practicar no tienen la cabeza bastante libre para entregarse á los exámenes teóricos; tambien pueden inducir en error á los jóvenes, y ser muy perjudiciales al suceso de sus estudios.

38 En otra memoria me ocuparé del caso en que los muros pueden moverse horizontalmente, el qual conduce á la equacion (36)

$$x = \frac{h\left[\frac{1}{2}\pi(h-h_{,,})t^2-(n+n_{,})\left(\frac{1}{2}\Pi hq+r\right)\right]}{\Pi hq+r};$$

y daré muchos detalles sobre objetos que solo he indicado aquí. Tambien trataré de la influencia que tienen sobre la estabilidad de los muros los contrafuertes, y en general todas las partes salientes de los muros, tanto hácia al exterior, como hácia al interior.

TABLA

Que da el ángulo formado por la línea del talud y por el horizonte quando se conoce el número de centésimas partes de la base contenidas en la altura del talud, y que dicha altura no excede al doble de la base.

Nota. Las alturas de los taludes son los números puestos en la columna llamada *tangente.*

Tang.	*Grad.*	*Min.*	*Tang.*	*Grad.*	*Min.*	*Tang.*	*Grad.*	*Min.*	*Tang.*	*Grad.*	*Min.*
0	0	00	46	24	42	92	42	37	138	54	04
1	0	34	47	25	10	93	42	52	139	54	16
2	1	08	48	25	38	94	43	13	140	54	28
3	1	43	49	26	06	95	43	31	141	54	39
4	2	17	50	26	33	96	43	49	142	54	50
5	2	51	51	27	01	97	44	07	143	55	02
6	3	26	52	27	28	98	44	26	144	55	13
7	4	00	53	27	51	99	44	42	145	55	24
8	4	34	54	28	22	100	45	00	146	55	35
9	5	08	55	28	48	101	45	17	147	55	46
10	5	42	56	29	13	102	45	34	148	55	57
11	6	16	57	29	40	103	45	50	149	56	07
12	6	50	58	30	06	104	46	07	150	56	18
13	7	24	59	30	32	105	46	23	151	56	29
14	7	58	60	30	57	106	46	40	152	56	39
15	8	31	61	31	28	107	46	56	153	56	50
16	9	05	62	31	47	108	47	12	154	57	00
17	9	38	63	32	11	109	47	27	155	57	10
18	10	13	64	32	36	110	47	43	156	57	20
19	10	35	65	33	01	111	47	59	157	57	30
20	11	18	66	33	25	112	48	14	158	57	40
21	11	51	67	33	48	113	48	29	159	57	50
22	12	24	68	34	13	114	48	44	160	57	59
23	12	57	69	34	30	115	48	59	161	58	09
24	13	30	70	34	59	116	49	14	162	58	18
25	14	02	71	35	22	117	49	26	163	58	28
26	14	34	72	35	44	118	49	43	164	58	37
27	15	06	73	36	06	119	49	57	165	58	46
28	15	38	74	36	48	120	50	11	166	58	55
29	16	10	75	36	51	121	50	25	167	59	05
30	16	41	76	37	13	122	50	39	168	59	14
31	17	07	77	37	36	123	50	53	169	59	22
32	17	38	78	37	57	124	51	07	170	59	32
33	18	15	79	38	18	125	51	20	171	59	40
34	18	46	80	38	39	126	51	34	172	59	49
35	19	17	81	39	03	127	51	47	173	59	58
36	19	48	82	39	20	128	52	00	174	60	06
37	20	18	83	39	41	129	52	13	175	60	15
38	20	48	84	40	01	130	52	26	176	60	23
39	21	15	85	40	22	131	52	38	177	60	32
40	21	48	86	40	41	132	52	51	178	60	40
41	22	17	87	41	01	133	53	03	179	60	48
42	22	46	88	41	20	134	53	16	180	60	56
43	23	15	89	41	40	135	53	27			
44	23	45	90	41	59	136	53	40			
45	24	13	91	42	18	137	53	52			

TABLA

Que da el número de milésimas partes de la base de un talud, que contiene la altura de este mismo talud, para todos los ángulos, de grado en grado, que puede formar con el horizonte.

Nota. Las alturas de los taludes se hallan en la columna llamada *tangente*; y son los números que es necesario escribir al lado de los grados correspondientes sobre el arco KT de la fórmula gráfica.

Grad.	Tang.	Grad.	Tang.	Grad.	Tang.
0	0	31	601	62	1880
1	17	32	625	63	1963
2	35	33	649	64	2050
3	52	34	674	65	2144
4	70	35	700	66	2246
5	87	36	726	67	2356
6	105	37	754	68	2475
7	123	38	781	69	2605
8	141	39	810	70	2747
9	158	40	839	71	2905
10	176	41	869	72	3077
11	194	42	900	73	3271
12	213	43	933	74	3487
13	231	44	966	75	3732
14	249	45	1000	76	4011
15	268	46	1033	77	4331
16	287	47	1072	78	4705
17	306	48	1111	79	5145
18	325	49	1150	80	5671
19	344	50	1192	81	6314
20	364	51	1235	82	7115
21	384	52	1276	83	8144
22	404	53	1327	84	9514
23	424	54	1376	85	11430
24	445	55	1428	86	14301
25	466	56	1483	87	19081
26	488	57	1540	88	28636
27	510	58	1600	89	57290
28	532	59	1664	90	infin.
29	554	60	1732		
30	577	61	1804		

MÉTODO PRÁCTICO

PARA RESOLVER CON SUMA FACILIDAD

LOS PRINCIPALES PROBLEMAS

RELATIVOS Á LA FORMA Y DIMENSIONES QUE DEBEN DARSE

Á LOS MUROS DE REVESTIMIENTO,

POR R. PRONY,

MIEMBRO DEL INSTITUTO NACIONAL DE CIENCIAS Y ARTES,
Y DIRECTOR DE LA ESCUELA DE PUENTES Y CALZADAS.

TRADUCIDO AL CASTELLANO

PARA EL USO DE LOS INDIVIDUOS

DE LA INSPECCION GENERAL DE CAMINOS.

INSTRUCCION PRÁCTICA

SOBRE EL MÉTODO DE DETERMINAR

LAS DIMENSIONES DE LOS MUROS

DE REVESTIMIENTO.

1 Habiendo admitido en mis *investigaciones sobre el empuje de tierras* para la *línea de talud*, el *rozamiento* y la *cohesion* las hipotesis generalmente adoptadas por los constructores y los físicos, y que se conforman bastante bien con la observacion, queda expuesta de un modo completo y riguroso la análisis de los principales problemas relativos á la forma y á las dimensiones de los *muros de revestimiento*. En otra memoria trataré diferentes qüestiones particulares, que se hallan indicadas en mis *investigaciones*, y cuya solucion exîge que haga algunas experiencias.

2 El problema fundamental del *empuje de las tierras* pertenece esencialmente á la parte de la análisis que trata de *máxîmos* y *mínimos*; y en esto conviene con la mayor parte de los problemas físico-matemáticos que se refieren á las construcciones, los quales por lo comun exîgen la investigacion de líneas, de superficies, de sistemas de fuerzas ó de resistencias &c., que gozan de la propiedad del *máxîmo* ó del *mínimo*.

Coulomb creo es el primero que haya considerado el problema del *empuje de las tierras* baxo este punto de vista: todos los demas deben conducir á soluciones incompletas ó empíricas: partiendo de los mismos principios que él, he vuelto á hacer todos los cálculos, así del problema fundamental, como de diferentes qüestiones particulares, y he llegado á encontrar un nuevo teorema, notable por su sencillez, que me ha facilitado el medio de dar para todos los casos de aplicacion fórmulas sumamente fáciles de calcular, á pesar de contener los efectos del *rozamiento* y de la *cohesion.**

3 He aquí este teorema, publicado por la primera vez en mi *Mecánica filosófica*.

,,Si el paramento de un muro en forma de paralelógramo rec-
,,tángulo, del qual dos de sus lados son horizontales, y los otros
,,dos verticales, sostiene tierras, cuya superficie superior es hori-
,,zontal, y que libres y recientemente removidas formarian un

„*talud*, cuya inclinacion respecto á la vertical seria A, se deter-
„minará en estas tierras el sólido del mayor empuje cortándolos
„por un plano que contenga la base horizontal del paralelógra-
„mo, y que divida el ángulo A en dos partes iguales."

Se puede ver en mis *investigaciones* &c. el uso que he hecho de esta propiedad para hacer mas fáciles y convincentes los experimentos, y mas expeditivos y seguros los cálculos que ofrecen los casos prácticos; pero para que resulten de estas *investigaciones* todas las utilidades que pueden producir, he querido libertar enteramente su aplicacion del embarazo del cálculo, y reducirla á métodos puramente gráficos: este es el objeto de la *fórmula gráfica* que acompaña esta Instruccion; por su medio podrán verificar los Ingenieros sus resultados numéricos, y aun dispensarse de buscarlos; y en general ofrecerá á los constructores, poco ó nada instruidos en la análisis algebráica, un método muy cómodo para trazar los perfiles de los muros que deben sostener el empuje de las tierras, capaces en efecto de resistir á este empuje.

Precauciones que deben tomarse para la conservacion de la fórmula gráfica, y datos que deben conocerse para hacer uso de ella.

4 Aconsejo á los que hagan uso de mi *fórmula gráfica* empezar por encolarla sobre un carton, tomando las precauciones necesarias para que su superficie quede bien lisa: las diferentes modificaciones que padece, bien sea quando el grabador la humedece, ó bien por la cola que la penetra, afectan del mismo modo todas sus partes, y no alteran por consiguiente casi nada la proporcion que exîste entre ellas.

Tomada esta precaucion, convendrá servirse para los trazos, de que hablarémos, de papel transparente, aplicándole sobre la *fórmula gráfica*, de modo que no varíe de posicion durante la operacion.

Tambien podrá trazarse la figura sobre papel comun, tomando las medidas sobre la *fórmula gráfica*, y trasladándolas sobre el papel. Así se conservará la figura ó *modelo original*, que de otro modo, si se trazasen sobre ella inmediatamente las líneas de construccion, en poco tiempo se haria confusa, y no se podria hacer uso de ella.

5 Se suponen siempre conocidas las gravedades específicas, así de las tierras, como de la mampostería, y la inclinacion del talud que toman las tierras quando estan recientemente removidas; se da tambien la altura del muro que sostiene el empuje de las

tierras desde la parte superior de la plataforma de sus cimientos, hasta el cordon; supongo que en virtud de algunas consideraciones particulares se hayan determinado los taludes que debe tener este muro, así por la parte exterior, como por la interior de las tierras (en la continuacion de mis *investigaciones* hablaré sobre algunas condiciones que deben fixar estos taludes), y el trazar el perfil del muro depende del conocimiento de su grueso en el cordon; el objeto principal de la *fórmula gráfica* es determinar este grueso.

6 En el uso de esta fórmula deben distinguirse dos casos, á saber:

1º Quando el objeto del muro es contrarestar el empuje de un fluido, ó de tierras tan disueltas que actúan casi del mismo modo que los fluidos.

2º Quando las tierras sostenidas por el muro y recientemente removidas afectan un talud constante, cuya inclinacion es conocida.

Operacion comun á estos dos casos.

7 Entre las escalas de varas castellanas que se hallan de una y otra parte del paralelógramo ABCD se tomará la que se quiera adoptar para trazar el muro que se desea construir; convendrá tomar la mas grande de las que permitan colocar la línea superior de este perfil entre HN y AB (lo que será posible siempre que el muro tenga mas de $4\frac{4}{5}$ pies), á fin de que las distancias tomadas con el compas sean mas exâctas.

Hallándose repetida cada una de las escalas á los dos lados de ABCD, será muy fácil tirar una paralela á DC, que pase por el punto de la escala adoptada, que corresponde á la altura del muro sobre la plataforma de su cimiento, de modo que representando DC la parte superior de dicha plataforma, la paralela de que tratamos representa la horizontal tirada por el punto superior del cordon. Trátase de hallar sobre esta línea, que llamaré *horizontal superior*, dos puntos, cuya distancia respectiva sea igual al grueso del muro en su extremo superior. Llamaré la porcion de la *horizontal superior* comprehendida entre estos dos puntos *línea del vértice*: aquel de estos dos puntos que se halla sobre el paramento visible, *punto anterior de la línea del vértice*; y el que se halla del lado de las tierras, *punto posterior de la línea del vértice*.

PRIMER CASO,

En que el muro debe sostener un fluido, ó tierras tan disueltas, que casi actúan como los fluidos.

8 Este caso presenta quatro subdivisiones relativas á la forma del muro ó á la inclinacion de sus paramentos interior y exterior.

1º Los dos paramentos del muro siendo verticales.
2º El paramento exterior con talud, el interior á plomo.
3º Los dos paramentos con taludes iguales.
4º Los dos paramentos con taludes desiguales.

En cada una de estas circunstancias se trazan los perfiles como sigue.

9 1º *Siendo verticales los dos paramentos del muro.* Sea AD el paramento exterior del muro, la interseccion de esta línea AD y de la *horizontal superior* representará *el punto anterior de la línea del vértice.*

Para hallar *el punto posterior de la línea del vértice* se verá quántas veces la centésima parte del peso específico de la mampostería está contenida en el peso específico del agua ó de las tierras: supongamos se contenga 80 veces, el *punto posterior* que se busca de la *línea del vértice* será el de interseccion de la *horizontal superior*, y de aquella de las líneas trazadas en el quadrilátero FBML que corresponde á la division marcada 80, debaxo de estas palabras *líneas de las gravedades específicas.*

Habiendo determinado de este modo la *línea del vértice*, como por suposicion el perfil del muro es un paralelógramo rectángulo, todo quanto pertenece á este muro se halla determinado.

10 2º *El paramento exterior con talud, y el otro á plomo.* El talud debe estar indicado por la relacion de su base á su altura, estimada en centésimas partes de esta altura; supongamos sea de $\frac{8}{100}$, se trazará como antes *la horizontal superior*; y el *punto anterior* de la *línea del vértice* se hallará en la interseccion de esta *horizontal superior*, y de aquella de las líneas trazadas en el quadrilátero AEGH que corresponde á la division núm. 8 baxo las palabras *línea del talud de los muros.*

Al buscar esta línea es menester tener bien presente, que las 30 divisiones de la línea AE se hallan cada una de ellas subdivididas en dos partes, y que la octava division, de que acabo de

hablar, corresponde efectivamente á la decimasexta de estas partes; pero las *divisiones enteras* se distinguen de las otras en que las *líneas* que las terminan son dos veces mas largas que las otras. Estas medias divisiones sirven para quando el talud es dado en centésimas partes, y sus mitades; así, si en lugar de ser $\frac{8}{100}$ fuese $\frac{8}{100}$ y medio, el *punto anterior de la línea del vértice* se hallaria en la interseccion de la *horizontal superior*, y de aquella de las líneas comprehendidas en el quadrilátero AEGH, que corresponde á la media division, que se halla inmediatamente despues de la octava division entera del lado de E.

El punto posterior de la línea del vértice se determina por el método indicado art. 9 para el caso de los dos paramentos verticales.

Determinada de este modo *la línea del vértice*, se tirará de su *punto anterior* una recta al punto D; de su *punto posterior* una perpendicular sobre DC, se tendrá un trapecio cuya base se hallará sobre DC, y cuyo lado superior será la *línea del vértice*; los otros dos lados son la línea tirada del *punto anterior* á D, y de la perpendicular baxada del *punto posterior* sobre DC: este trapecio será el perfil del muro que debe sostener el empuje de las tierras.

11 3º *En el caso de que los dos taludes sean iguales.* Trácese la *horizontal superior* coma antes; supongamos despues que cada uno de los taludes iguales sea de $\frac{8}{100}$; agréguese á este valor del talud su mitad, se tendrá $\frac{12}{100}$, tómese entre las líneas trazadas sobre el quadrilátero AEGH, la que corresponde á la division entera, marcada 12: la interseccion de esta línea y de la *línea del vértice* será el *punto anterior de la línea del vértice*.

El punto posterior de la línea del vértice se determina del modo indicado art. 9 para el caso de los dos paramentos verticales.

Determinada de este modo la *línea del vértice*, se tirarán de los puntos *anterior* y *posterior* dos líneas rectas, que formen sobre CD la inclinacion del talud comun de los paramentos, prolongadas estas dos rectas hasta su encuentro con DC, la parte de DC comprehendida entre los puntos de reunion y la *línea del vértice* formarán un trapecio, que será el perfil transversal del muro.

12 4º *En el caso de que los taludes no sean iguales.* Trácese como antes la *horizontal superior*; supóngase despues que el talud del paramento exterior sea $\frac{8}{100}$, y el del interior de $\frac{6}{100}$. El ta-

lud del paramento exterior $\frac{8}{100}$, mas la mitad $\frac{3}{100}$; del interior hacen $\frac{11}{100}$; y se tendrá el *punto anterior de la línea del vértice*, en la interseccion de esta *línea del vértice*, y de aquella de las líneas trazadas en el quadrilátero AEGH, que corresponde á la division, marcada 11.

El punto posterior de la línea del vértice se determina siempre como en el art. 9.

SEGUNDO CASO.

Las tierras que debe sostener el muro son capaces de conservar un talud, y se conoce el valor de este talud en el caso en que las tierras se hallan recientemente removidas.

13 Las dimensiones que resultan de las construcciones indicadas desde el art. 9 hasta el art. 12 dan el *máxîmo* del grueso de los muros que sostienen el empuje de las tierras, y aunque sean aplicables, particularmente á los fluidos, será prudente, para ponerse al abrigo de qualquier suceso, de emplearlas aun en los casos en que las tierras recientemente removidas se mantengan con un cierto talud; en efecto, se concibe que este talud puede ser efecto de cierto grado de *sequedad* en que se hallen las tierras en el momento de la experiencia, y que estas mismas tierras, embebidas y disueltas como se hallan muchas veces quando un muro las sostiene, tomasen tal vez un talud mucho menor, y á veces insensible.

Tambien se sabe que puede introducirse una capa vertical muy delgada de agua en un vacío producido entre el muro y las tierras por la *contraccion* de estas, quedando de este modo el muro sujeto al empuje de un fluido &c.

14 Pero quando se esté bien seguro de que no puede acaecer ninguna de estas circunstancias, y que en las que pueden reputarse como menos favorables exîste siempre una línea de talud natural, sobre la qual podrian sostenerse las tierras libres y recientemente removidas; entonces podrán disminuirse los gruesos de los muros destinados á sostenerlas, resultando una economía que merece la pena de que se tenga en consideracion.

Este segundo caso ofrece las mismas subdivisiones que el primero, cada uno de los quales exîge la operacion preliminar del art. 7, despues de la qual se hace lo que sigue.

15 1.º *Los dos paramentos son verticales.* Determínese el *punto anterior de la línea del vértice* como en el art. 9, y el *punto posterior* como sigue.

Dado el talud de las tierras por la relacion de su base á su altura, se sabe siempre quántas milésimas partes de la base contiene la altura: supongamos pues que la relacion dada de la altura á la base sea como 325 á 1000; busco sobre la línea CN el número 325; y veo se halla al extremo de una línea dirigida hácia el centro D, terminada por la otra parte en el quarto de círculo KT, donde se halla el número 36 (*), y la indico por la línea 325 . 36.

Supongamos ademas que la gravedad específica de la mampostería sea los $\frac{80}{100}$ de la de las tierras; por la divisinn de la línea TC, marcada 80, levanto una perpendicular á la línea DC, la prolongo hasta que encuentre la línea 325 . 36, y llamo *línea del mayor empuje* la porcion de esta perpendicular comprehendida entre DC y la línea 325 . 36. Traslado *la línea del mayor empuje* sobre la línea AB; de modo que su orígen se halle en A, y el otro extremo se termine en un punto entre A y B; de este punto tiro una línea al punto D: la interseccion de esta línea recta, y de la *horizontal superior*, será *el punto posterior de la línea del vértice.*

Determinados de este modo los puntos *anterior* y *posterior* de la línea del vértice, esta línea y la altura del muro son dos de los lados del paralelógramo rectángulo, que por hipótesis forma el perfil del muro.

16 2.º *Formando talud por la parte exterior del muro, cuya parte interior es vertical.* Determínese *el punto posterior de la línea del vértice* como en el art. 15 que precede, y hágase lo demas de la construccion como en el art. 10.

(*) Suponiendo el radio 1000, el número 325 es igual á la tangente de 18 grados, y en efecto se ve en el sector DkTD el número 325 al lado del número 18; lo que hace ver, que quando la altura del talud es los $\frac{325}{1000}$ de la base, la inclinacion de este talud respecto del horizonte es de 18°, ó $\frac{18}{100}$ del quarto de círculo. El complemento 72° de 18° (que corresponde al ángulo τ en mis *investigaciones* &c.) es 36°, de modo que la línea C 325 es la tangente de la mitad del ángulo formado por la vertical y la línea del talud, lo que corresponde en mis *investigaciones* &c. á la cantidad tang. $\frac{\tau}{2}$, ó t.

17 3.º *Formando taludes iguales ambos paramentos.* Determínese *el punto posterior de la línea del vértice* como en el art. 15, y lo demas de la construccion como en el art. 11.

18 4.º *Formando taludes desiguales los dos paramentos.* Determínese *el punto posterior de la línea del vértice* como en el art. 15, y hágase el resto de la construccion como en el art. 12.

Construccion de una fórmula que los Ingenieros emplean freqüentemente para determinar las dimensiones de los muros destinados á sostener el empuje de las tierras.

19 La equacion (21) de mis *investigaciones* &c. proviene de un método de resolver el problema del empuje de las tierras, que, como hice ver quando la di, conduce á una solucion incompleta y empírica; no obstante noté que la fórmula que contiene esta solucion podia tener aplicaciones útiles; quando se trata del empuje del agua ó del de las tierras sumamente disueltas, conduce casi á los mismos resultados que los que se hubieran hallado por las reglas dadas desde el art. 9 hasta el art. 18. Pero á medida que el talud natural de las tierras es mas inclinado respecto al horizonte, da gruesos mayores que los que se encuentran empleando las reglas dadas en el art. 13 y siguientes hasta el art. 18. Por consiguiente, en general se hallan empleando esta equacion (21), ó sus derivadas, mayores gruesos que los que resultan haciendo uso de las equaciones en que se han tenido en consideracion el *rozamiento*, la *cohesion* &c., y menores de los que se hallarian empleando las equaciones en que se han despreciado estas circunstancias, esto es, valores medios que podrán emplearse con toda confianza, siempre que se esté seguro de que en ninguna circunstancia el talud natural, que tomarian las tierras si se hallasen libres, no será mayor que el que se ha introducido en el cálculo. Por estas razones he creido deber agregar á la construccion gráfica de las equaciones, que se deducen de mi teoría, la de una fórmula que emplean con freqüencia algunos Ingenieros hábiles, y en cuyo favor se puede citar la Asamblea de puentes y calzadas, que aprobó un informe, en el qual se daba dicha formula como regla de cálculo.

Seguiré en la exposicion del proceder gráfico las mismas divisiones que anteriormente, cada una de las quales exîge la operacion preliminar del art. 7.

20 1.º *Quando los dos paramentos son verticales.* Se determina-

rá el *punto anterior de la línea del vértice* como en el art. 9, y el *punto posterior* de esta misma línea como sigue.

Supongamos que la relacion entre la altura del talud natural de las tierras y su base sea de 577 á 1000: busco el número 577 en el sector DKTD, y le hallo que corresponde á 30.^{G}, lo que desde luego me indica que el ángulo del talud de las tierras con el horizonte es de 30.^{G}.

Supongamos tambien que la relacion entre la gravedad específica de las tierras y la de la mampostería sea de 77 á 100, prolongo el radio D.577 ó D.30 hasta que encuentre el círculo comprehendido en el espacio ECKH, que corresponde en EC y en EH al núm. 77; desde dicho punto de reunion baxo una perpendicular sobre DC, y á la distancia entre el centro D y el extremo de esta perpendicular la llamo *coseno reducido del ángulo del talud.*

Traslado sobre la línea AB el *coseno reducido del ángulo del talud*, de modo que su orígen esté en A, y se termine en un punto que se halla entre A y B; desde este punto tiro una línea al centro D, la interseccion de esta línea recta y de la *horizontal superior* será el *punto posterior de la línea del vértice.*

Determinada de este modo la *línea del vértice*, dicha línea y la altura del muro serán los dos lados del paralelógramo rectángulo, que, segun la hipótesis, debe formar el perfil del muro.

21 2.º *El paramento exterior en talud, el otro vertical.* Se determinará el *punto posterior de la línea del vértice* como en el art. 20 que precede, lo demas de la construccion se executará como en el art. 10.

22 3.º *Los dos paramentos formando taludes iguales.* Se determinará el *punto posterior de la línea del vértice* como en el artículo 20, lo demas de la construccion como en el art. 11.

23 4.º *Los dos paramentos formando taludes desiguales.* Se determinará el *punto posterior de la línea del vértice* como en el artículo 20, lo restante de la construccion como en el art. 12.

Caso en que la superficie superior de las tierras que debe sostener el muro se halla cargada por un peso repartido uniformemente sobre ella.

24 La superficie superior del terreno que debe sostener el muro puede hallarse cargada por un empedrado, por una escarpa &c.; y conviene tener en cuenta esta causa que debe aumentar

el empuje de las tierras, lo que puede hacerse sin variar en nada las construcciones precedentes.

Para aclarar esto, por medio de un exemplo numérico, que servirá de modelo ó de regla general en todos los casos, supongamos que la altura del muro sea de 10 varas, que las tierras pesen 1500 libras por vara cúbica, la mampostería 1875 libras, y que la superficie superior del terreno esté cargada de 312½ libras por vara quadrada. Se buscaria, como se ha hecho anteriormente, para determinar el *punto posterior de la línea del vértice* el número de centésimas contenido en $\frac{1500}{1875}$, que es 0,80, y se emplearia la division de 80 de FB ó de TC; pero en el caso en que cada vara quadrada de la superficie del terreno sostenga 312½ libras, es necesario dividir el triplo de este peso, ó 937,5 por el número 10 varas que contiene la altura del muro, añadir el quociente 93,75 á 1500, lo qual da para la suma 1593,75, y buscar el número de centésimas contenidas en $\frac{1593,75}{1875}$, se encuentran 85, y se substituirá la division 85 de FB ó TC á la division 80, que se habria empleado si la superficie del terreno no estuviese cargada con ningun peso; es decir, que será necesario atribuir á las tierras una gravedad específica igual á la que tienen, mas tres veces el quociente del peso que sufre la unidad de la superficie superior de estas tierras dividida por la altura del muro, y emplear esta gravedad específica así aumentada, del mismo modo que se ha empleado anteriormente la gravedad específica natural de las tierras.

De la reduccion que se puede hacer en el espesor de un muro de revestimiento quando se levanta un parapeto encima de dicho muro.

25 Las construcciones precedentes suponen que el muro no se eleva mas que hasta la superficie superior de las tierras que tiene que sostener; pero sucede muy á menudo que se edifica encima del muro un parapeto que aumenta el peso. Seria fácil disponer la operacion gráfica de modo que las dimensiones del perfil que se obtuviese conviniesen á la condicion de la elevacion del parapeto; pero es muchísimo mas cómodo y mas sencillo formar primeramente el perfil como si no hubiese parapeto, y hacer despues, para hallar la disminucion de espesor relativa al parapeto, el cálculo aritmético siguiente, que es tan elemental y tan fácil,

que qualquiera que sepa medianamente las quatro reglas de la aritmética podrá practicarla sin la menor dificultad.

He aquí la regla de cálculo que se podrá seguir en todos los casos. Llamo *talud total* de un paramento de muro el producto de la altura de dicho muro (desde encima de la plataforma de la fundacion hasta el enrase superior del cordon), por la razon entre la base y la altura del talud (ó por el talud sobre la unidad de altura); así teniendo un muro 6 varas de altura, y siendo la relacion de la base á la altura del talud de uno de sus paramentos 0,08 (lo que da 0,08 varas de talud por vara de altura), el *talud total* de este paramento será 6×0,08 varas, ó 0,48 varas. Hecho esto, para hallar la disminucion que se puede hacer atendiendo al parapeto en el espesor de un muro cuyo perfil se ha construido por los métodos precedentes, *súmese el talud total del paramento exterior, ó visto, con el semi-espesor del parapeto; multiplíquese la suma por la area de la seccion transversal de este parapeto; divídase este producto por otro compuesto de dos factores, de los quales el uno es la altura del muro, y el otro el espesor de este muro en la base, disminuido de la mitad del talud total de su paramento interior; el quociente será la disminucion buscada del espesor.*

Exemplo.	Varas.
La altura del muro se supone igual	6,000
El talud del paramento exterior, ó visto, de	0,08
El talud del paramento interior, ó del lado de las tierras, de	0,065
El espesor del muro sobre la plataforma de la fundacion, ó en la base	3,170
La altura del parapeto	1,000
El espesor del parapeto	0,400

Resulta de estos datos que el *talud total* del paramento visto es igual á 6×0,08, ó 0,48 varas, á lo qual hay que añadir el semiespesor 0,2 del parapeto, la suma será 0,68 varas, que multiplicado por la area 1×0,4, ó 0,4 de la seccion transversal del parapeto, da el producto 0,272. Despues la diferencia entre el espesor 3,17 en la base, y el *semi-talud total* $\frac{6\times 0{,}065}{2}$, ó 0,195 del paramento interior, es 2,975, cuyo producto por la altura 6 del muro igual 17,850. Dividiendo 0,272 por 17,85, el quociente 0,0152 varas indica que atendiendo al parapeto se puede disminuir el espesor del muro, hallado por las reglas precedentes,

tanto en la base como en el vértice de 7,752 líneas. Esta reduccion no merece tenerla en consideracion; pero es bueno que los prácticos sepan calcular, y por otra parte puede ser muy considerable en los muros de dimensiones pequeñas.

Será necesario en la regla precedente poner *cero* para el valor del talud del lado de las tierras, si el paramento que corresponde á este talud está elevado á plomo; y *cero* para el valor de los dos taludes, si los dos paramentos estan elevados á plomo.

Del grado de precision del método gráfico expuesto en este escrito.

26 Se convencerá qualquiera, sin duda, que el método gráfico expuesto en este escrito no dexa nada que desear en quanto á la sencillez y á la comodidad; no falta mas que hacer ver que tiene toda la exâctitud que se debe de desear en este género de operaciones.

Habiéndose delineado y grabado la estampa con mucho cuidado, y permitiendo las escalas, que estan á uno y otro lado del paralelógramo ABCD, dar á todos los perfiles que se tracen cosa de media vara de altura, seria necesario, vista la proporcion que suministran las escalas de estos perfiles, tirar una línea con una falta de cuidado y de maña muy grande, para que el error del compas en un espesor de muro, bien fuese en la base, bien en el vértice, fuese $\frac{1}{100}$ del espesor; y ningun dibuxante, por poco instruido que se halle, convendrá en que se pueda cometer semejante error, el qual no obstante merece poca atencion en las determinaciones de esta especie.

Falta pues evaluar la exâctitud teórica de las reglas dadas para la construccion gráfica de los perfiles, es decir (relativamente al objeto de práctica que tengo á la vista), dar un medio de calcular cómoda y exâctamente la diferencia entre los resultados numéricos que dan estas reglas, y los que dan las fórmulas analíticas rigurosas, en las quales no se desprecia ninguna cantidad que pueda influir, por poco que sea, en los valores que se buscan, aunque estas cantidades no merecen que se las considere en la práctica, y no sirven mas que para alargar los cálculos inútilmente.

Observo primeramente que quando el muro no tiene taludes, ó está levantado á plomo por ámbos lados, la construccion gráfica coincide perfectamente con la fórmula analítica; la correccion pues no puede aplicarse mas que á los muros que tienen taludes,

y ve aquí un método muy sencillo para encontrarla, sean los que se quieran los taludes.

Habiendo construido el perfil de un muro de revestimiento segun los métodos expuestos anteriormente, se encontrará el espesor que hay que añadir, tanto en la base, como en el vértice, para hacer las dimensiones de este perfil conformes á las que dan las fórmulas analíticas rigurosas, haciendo el cálculo siguiente.

Quádrese el talud total del paramento visto y el talud total del paramento interior; réstese del primer quadrado el quarto del segundo, y divídase la diferencia por seis veces el exceso del espesor del muro en la base sobre la mitad del talud total del paramento interior; el quociente será el espesor que se busca y que debe añadirse.

Se debe de advertir que esta fórmula, en el caso en que los resultados que diese mereciesen apreciarse, favoreceria la solidez, porque da un término de correccion que peca un poco por exceso. Su principal utilidad no consiste en buscar este término, porque se verá fácilmente que la correccion, como he dicho, es despreciable (véase *las investigaciones sobre el empuje de las tierras* &c., nota del art. 24), sino en hacer ver las ventajas de los muros con *taludes* sobre los de los paramentos verticales, y hacer ver de qué modo, con igual estabilidad ó resistencia para ser derribados, los primeros exîgen menos mampostería que los segundos. En otra parte daré mas detalles sobre esta propiedad.

Exemplo.	Varas.
Se supone que el muro tiene una altura de..............	8,000
Su talud exterior es, por vara, de..............................	0,080
Su talud interior de..	0,060
Y se encuentra, por las construcciones gráficas anteriores, su espesor en la base de..............................	3,250

El *talud total* exterior $= 8 \times 0{,}08 = 0{,}64$, cuyo quadrado.. $= 0{,}4096$

El *talud total* interior $= 8 \times 0{,}06 = 0{,}48$, cuyo quadrado dividido por 4.. $= 0{,}0576$

Diferencia.................. $= 0{,}3520$

La mitad 0,24 del *talud total* interior, restado de la base 3,25, da 3,01, cuyo sextuplo $= 18{,}06$; así el espesor que se busca y que se ha de añadir $= \frac{0{,}352}{18{,}06} = 0{,}019$, esto es, 9,8192 líneas. No merece atenderse á esta correccion, y la construccion gráfica tiene

toda la exâctitud necesaria; se llegará á un resultado semejante en todos los casos aplicables á la práctica de las construcciones.

Si la gravedad específica de las tierras es los $\frac{4}{3}$ de la de la mampostería, y que la línea del talud de las mismas tierras forme con el horizonte un ángulo de 15°, 51′, 11″, se encontrará por el artículo 18 de esta Instruccion, y conservando por otra parte los datos numéricos del exemplo anterior, el espesor 3,25 varas en la base.

Este espesor de 3,25 varas resultaria tambien de la construccion explicada en el art. 23, conservando los mismos datos, á excepcion del talud, que será necesario que forme con el horizonte un ángulo =43°, 13′, 46″.

Así un muro que se edificase segun las dimensiones deducidas de la fórmula empírica, de que he hablado en el art. 19, tendria aun estabilidad formando el talud de las tierras un ángulo semirecto, en el caso en que las tierras pasasen á ser fluidas, de modo que no conservasen mas que los $\frac{2}{5}$, poco mas ó menos de este talud: este exemplo comprueba lo que dixe acerca del uso de esta fórmula.

De la subdivision de las líneas de los taludes y de la gravedad específica.

27 He supuesto en todos los exemplos numéricos, dados anteriormente, que las relaciones de las gravedades específicas de la tierra y de la mampostería estaban expresadas exâctamente en centésimas, y que las relaciones de las alturas á las bases de los taludes de las tierras lo estaban en milésimas justas. Si no sucediese esto, se podria en las diversas partes de la figura, en que se encuentran las divisiones relativas á estas relaciones, emplear las de las divisiones de los números correspondientes que mas se aproxîmasen á los de los datos particulares, segun los quales se debe de construir; para hacerlo de otro modo y con mas exâctitud será necesario imaginar que el intervalo entre dos divisiones qualesquiera está subdividido en 10, 20 &c. partes; y que desde estas subdivisiones al centro comun D estan tiradas líneas rectas: de este modo se tendrán líneas de construccion tan exâctas, y aun mucho mas de lo que se necesita en este género de construcciones.

Las *líneas de gravedades específicas*, trazadas en la estampa, dan las relaciones entre las gravedades específicas de la tierra y de

la mampostería desde $\frac{60}{100}$ hasta $\frac{90}{100}$; y como por lo general el valor efectivo de esta relacion es $\frac{80}{100}$, se puede suponer que sus variaciones en diferentes tierras y diferentes naturalezas de los materiales de construccion estan contenidas en los límites $\frac{60}{100}$ y $\frac{90}{100}$; no obstante, si hubiese casos extraordinarios, en los quales estas relaciones saliesen de dichos límites, se podrá igualmente aplicar la *fórmula gráfica*; bastaria en este caso continuar las divisiones iguales de FB, sea en la prolongacion de FB por la parte de B, sea en la parte EF, poner en los nuevos puntos de division números relativos al rango que ocuparian con respecto á los comprehendidos entre F y B, y tirar desde cada uno de estos puntos líneas rectas dirigidas al centro D, y no pasando del quarto de círculo HGLMPC.

Construccion de la fórmula gráfica.

28 Concluiré esta Instruccion dando las proporciones exâctas de las diversas partes de la *fórmula gráfica*; en favor de los que queriendo, bien sea renovarla, ó hacer mas exemplares, y que no puedan hacerse con una grabada. Es necesario evitar en semejantes casos tomar medidas con el compas sobre exemplares maltratados y alterados con el uso que se hubiese hecho de ellos, y que solo deben de servir de modelo para disponer todas las partes de la figura, y comprehender perfectamente la descripcion siguiente.

Es inútil entrar en ningun detalle sobre las escalas puestas á uno y otro lado del paralelógramo rectángulo ABCD; se ve su construccion con sola la inspeccion de la figura, y su uso se ha explicado anteriormente; cada una de estas escalas está dividida en toda la extension de una línea recta igual á AD.

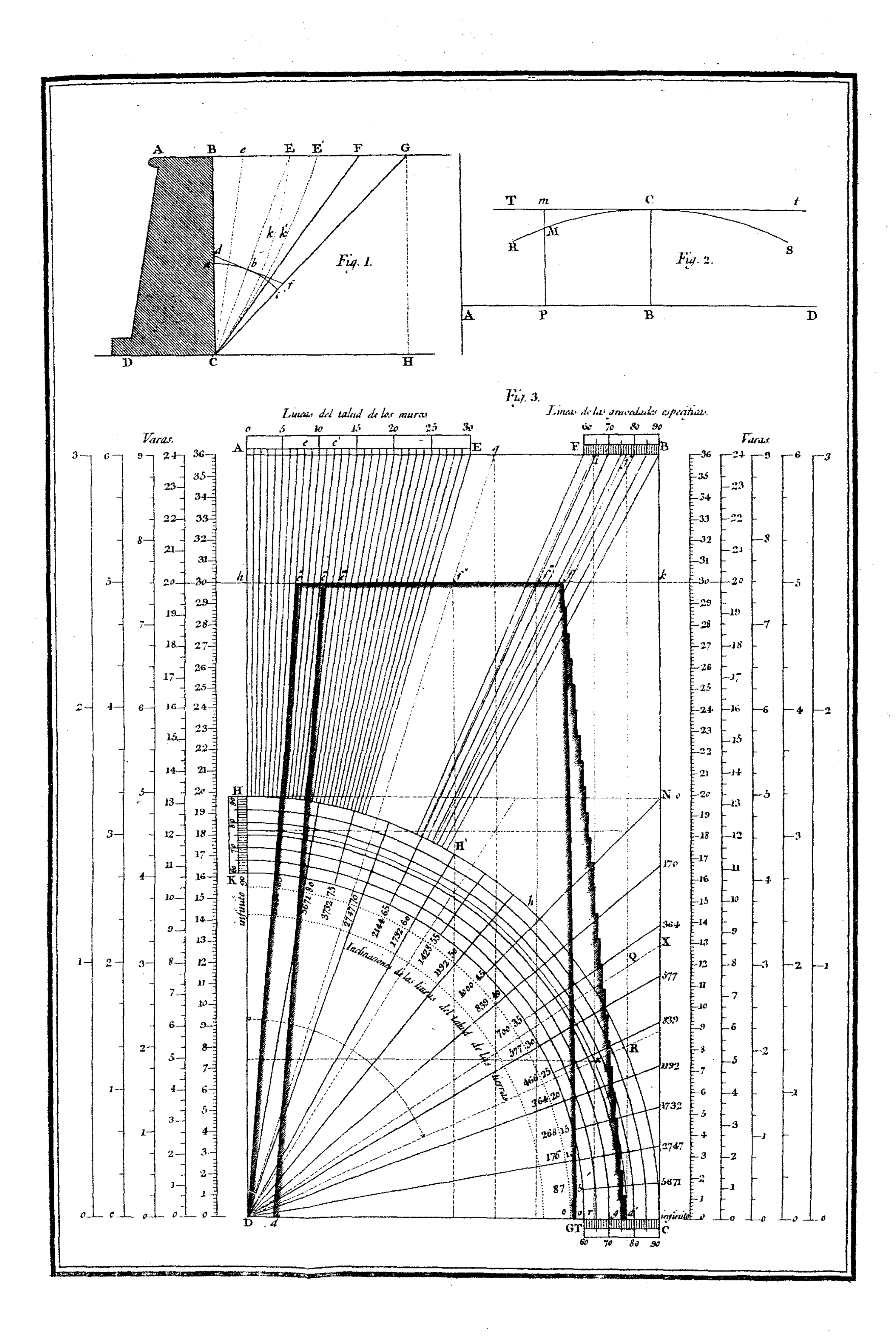
He dado al lado AD del paralelógramo ABCD cosa de media vara de largo; se le podrá dar mas ó menos; pero en todos los casos, si se supone AD dividida en 100 partes, se tendrá

AD = BC = ...	100 partes.
AB = DC = ...	55
AF = DT = ...	45
AE = ...	30
FB = TC = KH = ...	10
CN = DC = AB = ...	55

Por mèdio de esto se podrá hacer la figura en la proporcion que se quiera. Será necesario observar que las líneas rectas, tiradas en la area del paralelógramo ABCD, todas se dirigen al punto D, y que los quadrantes de círculo, contenidos en la zona KHCT, tienen este mismo punto D por centro comun. Conformándose por otra parte para los demas detalles con el exemplar que se tenga á la vista, se podrá hacer una copia de este exemplar perfectamente exâcta, y aun preferible al original, por poco que se haya alterado con el uso ó con la humedad.

Si se quiere dar mas extension á la línea FB de las gravedades específicas, esta adicion á la *fórmula gráfica* no tendrá, como lo he dicho ya art. 27, ningun inconveniente, pero me parece que no seria mas que recargar la figura con líneas inútiles.

Se podrán poner nuevas escalas entre las trazadas á uno y otro lado de la figura, en el caso en que estas no sean bastante cómodas, atendidos los datos particulares.


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Lineas del talud de los muros
Lineas de las gravedades especificas
Varas.
Varas.
Inclinaciones de las lineas del talud de los muros
infinito
infinito

INVESTIGACIONES

SOBRE EL EQUILIBRIO DE LAS BÓVEDAS,

POR CARLOS BOSSUT,

MIEMBRO DEL INSTITUTO NACIONAL DE CIENCIAS Y ARTES.

TRADUCIDAS AL CASTELLANO

PARA EL USO DE LOS ESTUDIOS

DE LA INSPECCION GENERAL DE CAMINOS.

INVESTIGACIONES

SOBRE EL EQUILIBRIO DE LAS BÓVEDAS,

POR CARLOS BOSSUT,

MIEMBRO DEL INSTITUTO NACIONAL DE CIENCIAS Y ARTES &c. &c.

INTRODUCCION.

Todo el mundo sabe que las piedras ó *dovelas* que componen una bóveda forman unas especies de pirámides truncadas, las quales, apoyándose las unas en las otras por sus caras laterales é inclinadas, se contrabalancean mutuamente, y quedan suspendidas en el ayre sin ningun apoyo inferior, dirigiendo todo su esfuerzo hácia los macizos ó pies derechos que sostienen la bóveda, como si esta no fuese sino un solo y mismo cuerpo contínuo. Las dovelas experimentan la accion de diferentes fuerzas, que provienen ó de sus propios pesos, ó de presiones exteriores, ó del rozamiento, ó de la cohesion de las materias &c. Todas estas fuerzas y las resistencias de los pies derechos componen un sistema que debe de estar en equilibrio, y ademas este equilibrio debe de ser firme y duradero.

Las fuerzas particulares que obran de una en otra sobre cada dovela pueden ser muy diferentes. Por exemplo, en una bóveda semicircular la dovela del medio ó la *clave* obra como una cuña contra la segunda dovela de la derecha ó de la izquierda, y procura hacerla subir; la segunda dovela obra del mismo modo contra la tercera, esta contra la quarta, y así sucesivamente. Pero, á medida que nos apartamos de la clave, van disminuyendo los ángulos que forman las caras laterales de las dovelas con el horizonte, de donde resulta que deben de ir aumentando las presiones absolutas de las dovelas, á fin de que los esfuerzos que resultan de estas presiones, perpendicularmente á las caras contiguas de las dovelas, sean iguales de uno en otro, y se equilibren mutuamente.

En general, sean las que se fuesen la figura de una bóveda, y la naturaleza de las fuerzas que obran sobre las dovelas, debe de haber entre todas estas fuerzas una relacion tal, que todas las dovelas, que realmente forman cuerpos separados, se mantengan en equilibrio en toda la extension de la bóveda, sin lo qual se desfiguraria y se arruinaria: despues, establecido ya este equilibrio parcial, se podrá considerar la bóveda como un cuerpo contínuo, y no se tratará sino de determinar las dimensiones que deben de tener los pies derechos para sostener el empuje, ó para aguantarle sin romperse.

Parece que los antiguos arquitectos no se conduxéron por principios ciertos y geométricos en la investigacion de los medios que empleaban para asegurarse de la solidez de sus edificios. La experiencia, la imitacion y una mecánica natural les servian de guias. Vitruvio, que florecia en tiempo de Augusto, y que ha reunido en su *arquitectura* todos los conocimientos que considera necesarios para los que exercen este arte, no habla de ningun modo de los socorros que deben de sacar de la mecánica para conocer y descomponer las fuerzas, y para dirigir sus esfuerzos hácia apoyos capaces de sostenerlos. No habla nada del arte de la montea, ó del corte de piedras y madera. Verosímilmente los antiguos arquitectos, ocupados enteramente de todo lo que pertenece á la decoracion externa y á la distribucion interna de sus edificios, abandonaban absolutamente á los aparejadores la parte del arte, que tiene por objeto la solidez y el detalle de los medios de construccion, en lo qual tienen por desgracia demasiados imitadores entre los modernos.

No se ha empezado á conocer sino hasta bien tarde la necesidad de someter el problema del equilibrio de las bóvedas á las leyes de la mecánica. En 1695, la Hire, en su *tratado de mecánica*, estableció por medio de la teoría de la cuña en qué proporcion debian de aumentar los pesos absolutos de las dovelas, desde la clave hasta las *impostas*, en una bóveda semicircular. El historiador de la Academia de Ciencias refiere, en el año de 1704, que Parent determinó, segun los mismos principios, pero solamente por puntos, qué figura debia de tener el extrados de una bóveda, cuyo intrados es un semicírculo, y que ademas dió la medida del empuje de semejante bóveda contra los pies derechos. No sé si se ha impreso esta solucion.

Habiendo resuelto en 1691 el problema de la *catenaria* los dos ilustres hermanos Santiago y Juan Bernoulli, Huguens y Leibnitz, no tardáron los geómetras en advertir que la figura de esta curva,

vuelta de abaxo arriba, es la que debe darse á una bóveda compuesta de dovelas infinitamente pequeñas é igualmente pesadas, para que esten en equilibrio todas sus partes. David Gregori fue el primero que advirtió esta identidad en las *Transacciones filosóficas* del año de 1707; pero su raciocinio, aunque exâcto, no tenia toda la claridad que podia desearse.

Se halla en una de las memorias póstumas de Santiago Bernoulli dos soluciones directas del problema, fundadas sobre dos maneras diferentes de mirar la accion de las dovelas. La primera es clara, simple, exâcta, y conduce fácilmente á la verdadera equacion de la curva, que es la catenaria vuelta, la segunda necesita de una pequeña correccion, que el autor hubiera hecho sin duda por sí mismo si hubiera podido revisar su memoria, y que Cramer, editor de sus obras, ha indicado: hecha esta correccion, se vuelve á encontrar igualmente la equacion de la catenaria. . .

Considerando la Hire, en las memorias de la Academia de Ciencias del año de 1712, el problema del empuje de las bóvedas, baxo un punto de vista indicado por algunas experiencias, dió una solucion, que, por la sencillez del cálculo y de los resultados, fue acogida y adoptada con ansia por la mayor parte de los prácticos, sin detenerse en si era ó no aplicable á todos los casos que podian ocurrir. Supone que las bóvedas, cuyos pies derechos no tienen un grueso suficiente para sostener el empuje, se abren hácia los riñones á la altura de cerca de 45 grados encima de las impostas: en conseqüencia mira la parte superior de la bóveda como una cuña que procura separar ó derribar los pies derechos, y determina, por la teoría de la cuña y de la palanca, las dimensiones que deben de tener para resistir á este solo esfuerzo. Durante mucho tiempo se ha atenido únicamente á este método para las bóvedas de cañon seguido; se le ha aplicado tambien á las medias-naranjas, aunque estos dos casos en nada se parecen, y antes, por el contrario, conducen á equaciones de diferentes grados, como se verá en lo sucesivo.

Couplet ha dado una memoria, dividida en dos partes, sobre el empuje de las bóvedas de cañon seguido. La primera, impresa en el volúmen de la Academia del año de 1729, trata del empuje de las bóvedas y del grueso de sus pies derechos, considerando las dovelas como infinitamente tersas ó capaces de resbalar las unas sobre las otras sin experimentar ninguna resistencia de parte del rozamiento. Pero no conformándose esta hipótesis exâctamente con la experiencia, la segunda parte de la memoria, impresa en el volúmen de la Academia del año de 1730, tiene por objeto las

mismas qüestiones, suponiendo que las dovelas no son capaces de resbalar, pero sí de levantarse y separarse las unas de las otras por medio de movimientos pequeños de rotacion. Toda esta teoría se aplica principalmente á las bóvedas circulares. Couplet determina la proporcion de los pesos de las dovelas, y la figura que se necesita dar al extrados, relativamente al intrados; por otra parte no ha añadido sino muy poco á las teorías de la Hire y de Parent; y ninguno de ellos ha tratado el objeto con la generalidad y precision necesarias, bien sea en la teoría, bien en la práctica.

El volúmen de la Academia del año de 1734 contiene una memoria de Bouguer *sobre las líneas curvas, propias para formar medias-naranjas*. Hace ver el autor que para esto se pueden emplear una infinidad de líneas curvas, y al mismo tiempo indica la manera de escoger las mas ventajosas. Supone constantemente que las dovelas tienen sus superficies infinitamente tersas: establece con arreglo á esta hipótesis, las condiciones de equilibrio en cada hilada horizontal de una media-naranja. Se ve que este problema se parece al de la catenaria vuelta en las bóvedas de cañon seguido. Por otra parte Bouguer no ha dado ningun método para determinar el empuje de las medias naranjas; no ha exâminado la ley de las fuerzas que deben de obrar sobre las dovelas, quando la curva generatriz está sujeta á condiciones dadas: materia fecunda en problemas curiosos y útiles.

Tales eran las obras, á lo menos las que yo conocia, sobre el equilibrio de las bóvedas, quando en 1770, como lo acreditan las datas, traté la qüestion en toda su generalidad, no solo para las bóvedas de cañon seguido, sino para las medias-naranjas. Exâminé todo lo perteneciente á la figura y al empuje de estas dos especies de bóvedas, en dos memorias impresas entre las de la Academia de Ciencias de París de los años de 1774 y 1776. Emprendí este trabajo con motivo de la media-naranja de la iglesia de Santa Genoveva (hoy dia *panteon frances*), empezada por el célebre arquitecto Sauflot, y acabada segun sus planos. Mirando los pilares y las columnas que sostienen esta media-naranja algunos críticos, poco versados en la mecánica, como insuficientes para aguantar el empuje, me empeñé en buscar la verdadera fórmula general, hasta entonces desconocida, para determinar el empuje de las medias-naranjas, así como la Hire habia determinado el de las bóvedas de cañon seguido: la aplicacion que hice de mi fórmula al objeto en qüestion prueba que los pilares tenian un grueso suficiente para resistir á la destruccion; así el edificio no ha experimentado por lo que hace á esto ningun movimiento. Pero, por

el uso vicioso que se tenia entonces de ahuecar la cama de las piedras hácia el interior, sucedió que la depresion ocasionada por la carga superior de la media-naranja ha hecho baxarse á las piedras hácia los paramentos, y casi todas las columnas han experimentado los funestos efectos de esta depresion. El mismo Sauflot, que se lo temió anticipadamente, emprendió hacer experiencias para determinar la resistencia de que son capaces las piedras sin pulverizarse baxo presiones dadas. Murió en 1780, con la desgraciada certeza ocular que los pilares de su media-naranja empezaban á abrirse hácia las orillas. Su máquina para pulverizar las piedras ha sido perfeccionada despues extraordinariamente por el ciudadano Rondelet, quien ha hecho un gran número de experiencias sobre la resistencia de las piedras de diferentes especies y de diferentes dimensiones: ha publicado ya una parte de este trabajo en su *memoria histórica sobre el panteon frances* (1797): continúa con suceso, y se deben de esperar ventajas muy grandes para el conocimiento de esta parte importante de la arquitectura. Por último añadiré, que se han tomado precauciones eficaces para evitar la ruina de la media-naranja del panteon frances.

El tomo VII de las obras presentadas á la Academia de Ciencias contiene, baxo la data del año de 1773, una excelente memoria del ciudadano Coulomb, hoy dia miembro del Instituto nacional, sobre algunos problemas relativos á la arquitectura. Uno de estos problemas es el del equilibrio de las bóvedas de cañon seguido, que el autor ha tratado por un método dirigido hácia la utilidad práctica.

En 1785 el ciudadano Mascheroni imprimió en Bérgamo una obra intitulada *nuevas investigaciones sobre el equilibrio de las bóvedas*, en la que hay proposiciones curiosas sobre el equilibrio de las bóvedas, principalmente sobre el equilibrio de las medias-naranjas, de bases circulares, elípticas y polígonas. Confiesa él mismo que mis dos memorias le han sido muy útiles.

Un gran número de nuevas reflexîones teóricas y experimentales que he hecho, despues de mis primeros ensayos, sobre esta materia, me han determinado á volverla á emprender y tratar con toda la extension necesaria para hacer mis investigaciones útiles á los mecánicos geómetras. Por otra parte he seguido siempre mis principios antiguos: hubiera podido dar mis adiciones en forma de suplemento de mis dos memorias; pero esto hubiera exîgido una multitud de citas y llamadas incompatibles con el método y la claridad, lo que solamente se consigue quando cada cosa está en su lugar. He preferido refundir enteramente mis dos

memorias, é incorporar las adiciones de tal modo, que el todo forma al presente una obra como nueva.

Consideraré separadamente el equilibrio de las bóvedas de cañon seguido y el de las medias-naranjas.

SECCION PRIMERA.

DEL EQUILIBRIO DE LAS BÓVEDAS DE CAÑON SEGUIDO.

CAPITULO PRIMERO

Determinar el grueso de los pies derechos quando la bóveda procura romperse por puntos conocidos de los riñones.

1 El problema de que se trata aquí es de la Hire de 1712. Aunque no tiene dificultad ninguna, no obstante me parece debo de dar en este lugar una solucion muy sencilla, para ahorrar á algunos lectores el trabajo de recurrir á las memorias de la Academia de Ciencias de Paris, ó á otras obras en que tambien se encuentra.

PROBLEMA.

2 *Considerando la parte superior* c*XZCZ′X′ (fig. 1) de una bóveda de cañon seguido, cuyas dos impostas estan á una misma altura, como una cuña que procura derribar los dos pies derechos, haciéndolos girar sobre los puntos fixos de rotacion F y F′, se piden los gruesos DF, D′F′ que se necesita dar á los pies derechos para que haya equilibrio.*

Supongo que la bóveda está dividida en dos partes iguales y semejantes por el exe vertical OCQ; que las juntas XZ, X′Z′ son perpendiculares á la curva del intrados ACA′; que las partes AZX*a*, A′Z′X′*a′* de la bóveda estan íntimamente unidas con los pies derechos AF, A′F′, y no forman con ellos sino un mismo cuerpo; y finalmente que toda la bóveda se compone de una misma materia homogenea, ó reducida á este estado, á fin de que no entren en el cálculo sino volúmenes.

Hallándose el centro de gravedad de la parte superior *c*XZCX′Z′ de la bóveda sobre la vertical OCQ, es claro que considerando los planos inclinados XZ, X′Z′ como inmóviles, habrá equilibrio quando se encuentre sobre OQ un punto, desde el qual se puedan tirar dos perpendiculares á los dos planos inclinados. Supongamos que el punto Q satisfaga á esta condicion, y que QG, Q′G′ sean las dos perpendiculares de que acabo de hablar.

Representando QN la area ó el peso *c*XZCZ′X′, descompóngase esta fuerza en otras dos QI, QS, dirigidas segun QG, QG′. Imaginemos que la fuerza QI (se debe entender lo mismo para la otra parte de la bóveda) se aplica al punto G de su direccion, y que está representada por G*h*=QI; descompongamos la fuer-

za Gh en otras dos Gq, Gf, la una horizontal, y la otra vertical (1). La fuerza horizontal Gq procura hacer girar al macizo XZADFY al rededor del punto fixo F, mientras que al contrario se halla detenido sobre su base por su propio peso y por la fuerza vertical Gf. Desde el punto H, centro de gravedad de la area AZXa, y desde el punto R, centro de gravedad del rectángulo ADFY, báxense las verticales HK, RL; en fin baxemos la vertical GT, y prolonguemos las rectas Gq, FY hasta que se encuentren en M.

Sean
- el seno total .... $=1$,
- el ángulo NQI ó fGh .... $=m$,
- el ángulo IQS .... $=p$,
- GT .... $=c$,
- AD .... $=h$,
- DT .... $=i$,
- DK .... $=k$,
- DF .... $=z$,
- la area cXZCZ′X′ .... $=a^2$,
- la area AZXa .... $=b^2$,

todas estas cantidades son dadas por la figura de la bóveda, á excepcion de z, que es la incógnita.

Siendo evidente que la fuerza Gh tiene por expresion $\frac{a^2 \times \text{sen.}\, m}{\text{sen.}\, p}$, la expresion de la fuerza Gq será $\frac{a^2 \times (\text{sen.}\, m)^2}{\text{sen.}\, p}$, y la de la fuerza G$f$ será $\frac{a^2\ \text{sen.}\, m\ \text{cos.}\, m}{\text{sen.}\, p}$. Harémos para abreviar $\frac{a^2 \times (\text{sen.}\, m)^2}{\text{sen.}\, p} = \text{A}$, y $\frac{a^2\ \text{sen.}\, m\ \text{cos.}\, m}{\text{sen.}\, p} = \text{B}$.

Se ve que las cantidades A y B tienen dos dimensiones; se prescinde del espesor horizontal de la bóveda, que siempre es el mismo en las bóvedas de cañon seguido.

Las condiciones de equilibrio exîgen que el momento de la fuerza A, con respecto al punto F, sea igual á la suma de los mo-

(1) Frisi, geómetra italiano, atacó este modo de descomponer las fuerzas, y substituyó otro en su lugar, que se halla en el tomo II de sus obras, impresas en Milan el año de 1783. Habiendo muerto poco tiempo despues, se le hizo un elogio fúnebre en Milan, en el que se cuidó especialmente de alabar su crítica y su método; pero habiéndose el celebre Trembley, miembro de la Academia Real de Ciencias y Bellas Letras de Berlin, tomado el trabajo de exâminar este pretendido método (Diario de Física, Setiembre 1788), ha hecho ver que no es mas que un texido de paralogismos y de absurdos. Aviso al panegirista.

mentos de las tres fuerzas B, b^2, hz, con respecto al mismo punto; luego se tendrá la equacion de segundo grado,

$$Ac = B(z+i) + b^2(z-k) + hz \times \frac{z}{2},$$

de donde se saca $z =$ ....

$$-\left(\frac{B+b^2}{h}\right) + \sqrt{\left[\frac{2Ac - 2Bi + 2b^2k}{h} + \left(\frac{B+b^2}{h}\right)^2\right]}.$$

No empleo sino el signo + del radical, pues de lo contrario el valor de z seria negativo, lo que no puede ser.

Son demasiado fáciles las aplicaciones de esta fórmula á exemplos particulares para detenerme en ellos. Debe de dar la experiencia la posicion de las juntas XZ, X′Z′: por lo comun se supone que estas juntas forman con el horizonte ángulos de 45 grados.

CAPITULO II.

De las relaciones que debe de haber entre las fuerzas que obran sobre las dovelas, y la figura de la bóveda, para que esté en equilibrio el sistema de las dovelas: determinacion subseqüente del grueso de los pies derechos.

3 Se dexa ver con bastante facilidad que el problema precedente no contiene mas que una determinacion hipotética y vaga del equilibrio de las bóvedas, y que si esta determinacion es suficiente en las aplicaciones prácticas, que no exîgen una gran precision, ella no puede contentar á los mecánicos geómetras. Se trata pues de considerar la bóveda en su contextura íntima, y empezar estableciendo el equilibrio entre todas las dovelas antes de ocuparse de las dimensiones de los pies derechos, las quales deben de estar subordinadas á este equilibrio. Pero, quando se acaba de concluir una bóveda, y que tiene todavía puesta la cimbra, no habiendo tenido las dovelas tiempo de formar cuerpo entre sí, se las debe de mirar como independientes las unas de las otras, y como sujetas separadamente á la accion de su propia pesantez y á la de los pesos que sufren. Así es necesario que se contraresten en este estado, puesto que la cimbra no es mas que un simple medio auxîliar para colocar sucesivamente las dovelas en su lugar, y que por otra parte es una cosa absolutamente extraña á la bóveda. Pero establecido una vez este equilibrio, subsistirá, y se afirmará en lo sucesivo necesariamente por causa de las uniones del mortero, y por causa de la resistencia del rozamiento: entonces el

empuje de la bóveda contra los pies derechos se exercerá como si no estuviese compuesta mas que de una sola pieza.

PROBLEMA I.

4 *Determinar las condiciones de equilibrio entre todas las dovelas de una bóveda qualquiera de cañon seguido.*

Sean (*fig.* 2) ACA′ el intrados, *aca′* el extrados de una bóveda de cañon seguido. Supongamos que á cada una de las dovelas se apliquen las fuerzas absolutas V, F, F′ &c., *f*, *f′* &c. Sean X, X′ dos dovelas consecutivas, sujetas respectivamente á la accion de las dos fuerzas F, F′. Las juntas *m*M, *n*N, *p*P &c. deben de ser perpendiculares al intrados A*c*A′, no solo para la hermosura de la bóveda, sino para la solidez de la construccion: así las supondré tales en efecto.

II.

Tomando en la direccion de la fuerza F la parte XE para representarla, la descompongo en otras dos fuerzas X*u*, X*t*, perpendiculares á las dos juntas *m*M, *n*N de la dovela X. Sea X′ el punto en que la direccion de la fuerza X*t* encuentra la F′E′, direccion de la fuerza F′. Tomo sobre F′X′ la parte X′E′ para representar la fuerza F′, y la descompongo en otras dos fuerzas X′*q*, X′*l*, perpendiculares á las dos juntas *n*N, *p*P de la dovela X′. Ahora bien, las dos dovelas X, X′ estarán en equilibrio, si las dos fuerzas X*t*, X′*q*, directamente opuestas, por medio de las quales obran la una contra la otra, son iguales. No se trata pues mas que de formar la equacion, *fuerza* X*t*=*fuerza* X′*q*, y de substituir por estas fuerzas sus valores.

III.

El paralelógramo X*t*E*u* da fuerza $Xt = \text{fuerza}\, XE \times \frac{\text{sen.}\, XEt}{\text{sen.}\, XtE} = F \times \frac{\text{sen.}\, XEt}{\text{sen.}\, XtE}$, del mismo modo el paralelógramo X′*q*E′*l* da fuerza $X'q = F' \times \frac{\text{sen.}\, X'E'q}{\text{sen.}\, X'qE'}$. Así se tendrá $F \times \frac{\text{sen.}\, XEt}{\text{sen.}\, XtE}$ ....

$$= F' \times \frac{\text{sen.}\, X'E'q}{\text{sen.}\, X'qE'}, \text{ ó : } \frac{F}{F'} = \frac{\text{sen.}\, XtE \times \text{sen.}\, X'E'q}{\text{sen.}\, XEt \times \text{sen.}\, X'qE'} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(A)}.$$

IV.

Sea I el punto de concurso de las juntas *m*M, *n*N, prolongadas; T el de las juntas *n*N, *p*P, tambien prolongadas; H y L los

puntos de concurso de las juntas extremas mM, pP, con el exe vertical CO; Z y G los puntos de concurso de las fuerzas F, F′ con el mismo exe. Es claro que el ángulo XtE es igual al ángulo NIM, puesto que los lados del uno son perpendiculares á los lados del otro. Por la misma razon el ángulo $X'qE'$ es igual al ángulo PTN. Ademas, tirando por el punto z, en que la recta Xu encuentra la junta mM, la recta zZ' paralela á direccion de la fuerza F, se verá que el ángulo XEt, ó el ángulo uXE, ó el ángulo $uzZ' =$ Ang. uzK — Ang. $KzZ' = 90°$ — Ang $KzZ' = 90°$ — (Ang. CZF — Ang. CHM): por medio de consideraciones semejantes, el ángulo $X'E'q = 90°$ — (Ang. CLP — Ang. CGF′). Luego, tomando siempre el seno total por la unidad, se tendrá, por trigonometría, sen. $XEt =$ cos. CZF × cos. CHM + sen. CZF × sen. CHM; y sen. $X'E'q =$ cos. CGF′ × cos. CLP + sen. CGF′ × sen. CLP. Así la equacion (A) se mudará en esta: ....

$$\frac{F}{F'} = \frac{\text{sen. NIM (cos. CGF'} \times \text{cos. CLP} + \text{sen. CGF'} \times \text{sen. CLP)}}{\text{sen. PTN (cos. CZF} \times \text{cos. CHM} + \text{sen. CZF} \times \text{sen. CHM)}} \ldots\ldots (B).$$

Se ve que por esta equacion, conociendo la figura del intrados, los arcos MN, NP &c., á los quales corresponden las dovelas, y las direcciones de las fuerzas F, F′ &c. se conocerán las relaciones de las mismas fuerzas y la figura del extrados. Por exemplo, si el intrados ACA′ (*fig. 3*) es un semi-círculo, si cada dovela está únicamente sujeta á la accion de su propia pesantez, y si los arcos del extrados mn, $n'p'$ &c. son concéntricos y semejantes á los del intrados, se podrán determinar, por la simple geometría elemental, los puntos m', n', p' &c., que es el problema particular de Parent. Voy á tomar el problema en general.

V.

Supongamos que sea infinito el número de las dovelas, ó que el intrados forme una curva contínua. Entónces (*fig. 4*) los arcos MN, NP &c. son infinitamente pequeños; y los ángulos NIM, PTN &c. son los que forman entre sí, de uno en otro, los radios osculadores. Sean MN, NP, PQ tres elementos consecutivos de la curva, que supongo iguales entre sí; tiremos al exe vertical CO las ordenadas MR, NR′, PR″, QR‴; y desde los puntos M, P baxemos las perpendiculares Mr, Ph sobre NR′, QR‴, respectivamente.

Sean
- CR .... $= x$
- CR′ .... $= x'$
- CR″ .... $= x''$
- MR .... $= y$
- NR′ .... $= y'$
- PR″ .... $= y''$
- Cada uno de los elementos iguales MN, NP, PQ. $= ds$
- el radio osculador MI .... $= R$
- el radio osculador NI .... $= R'$
- el ángulo CZF de la fuerza F con el exe .... $= u$
- el ángulo CGF′ de la fuerza F′ con el exe .... $= u'$.

Comparando la *figura 4* con la 2, se verá que sen. NIM $= \frac{ds}{R}$; sen. PTN $= \frac{ds}{R'}$. Ademas, siendo el ángulo CHM igual al ángulo MNr, se tiene cos. CHM $= \frac{rN}{MN} = \frac{dy}{ds}$; sen. CHM $= \frac{Mr}{MN} = \frac{dx}{ds}$: del mismo modo cos. CLP $= \frac{dy''}{ds}$, sen. CLP $= \frac{dx''}{ds}$. Por consiguiente la equacion general (B) se transforma en

$$\frac{F}{F'} = \frac{R'}{R} \times \frac{dy'' \cos. u' + dx'' \operatorname{sen}. u'}{dy \cos. u + dx \operatorname{sen}. u}:$$

Pero $F' = F + dF$; y siendo F la fuerza absoluta que obra sobre el elemento MN, ó la resultante de todas las fuerzas que obran sobre cada uno de los puntos de este elemento, y que podemos mirar como iguales y paralelas: si se llama ϕ una qualquiera de estas diversas fuerzas, se tendrá $F = \phi ds$, y $dF = d\phi ds$, siendo constante ds. Por otra parte, se tiene $R' = R + dR$; $y'' = y' + dy' = y + 2dy + d^2y$; $dy'' = dy + 2d^2y + d^2y$; $dx'' = dx + 2d^2x + d^3x$; $\cos. u' = \cos. u + d(\cos. u)$; $\operatorname{sen}. u' = \operatorname{sen}. u + d(\operatorname{sen}. u)$. Substituyendo todos estos valores en la equacion precedente, reduciendo y despreciando los infinitamente pequeños de tercer órden, se encontrará

$$0 = \begin{cases} 2R\varphi \cos. u d^2y + R\varphi dy \,.\, d(\cos. u) + 2R\varphi \operatorname{sen}. u d^2x + R\varphi dx \,.\, d(\operatorname{sen}. u) \\ + \varphi \cos. u \,.\, dRdy + \varphi \operatorname{sen}. u \,.\, dRdx + R \cos. u\, d\varphi dy + \operatorname{sen}. u \,.\, d\varphi dx, \end{cases}$$

cuya equacion se puede escribir baxo esta otra forma mas cómoda.

$$= (C) \ldots\ldots 0 = \begin{cases} \varphi \cos. u\,(2Rd^2y + dRdy) + \varphi \operatorname{sen}. u\,(2R\varphi d^2x + dRdx) \\ + Rdy \,.\, d(\varphi \cos. u) + Rdx \,.\, d(\varphi \operatorname{sen}. u). \end{cases}$$

COROLARIO GENERAL.

6 Esta equacion general da las soluciones de las dos qüestiones siguientes, de las quales la una es la inversa de la otra.

1º *Conociendo la ley que siguen las fuerzas que actúan sobre las dovelas, hallar la figura de la bóveda.*

2º *Conociendo la figura de la bóveda, hallar la ley que siguen las fuerzas que actúan sobre las dovelas.*

Voy á resolver muchos casos de estas dos qüestiones, limitándome á hipótesis que puedan realmente verificarse en la naturaleza.

Exemplos de la primera qüestion.

EXEMPLO I.

7 *Cada punto de la curva* ACA′ *se halla comprimido verticalmente por una fuerza* φ, *constante por todas partes.*

En esta hipótesis se tiene $\phi =$ constante, y $d\phi = 0$, cos. $= 1$. Por consiguiente la equacion general (C) se reducirá simplemente á

$$2Rd^2y + dRdy = 0.$$

Multiplicando por dy, é integrando, será $Rdy^2 = Ads^2$, siendo A una constante que determinarémos despues. Pongamos en lugar de R su valor $-\frac{dsdx}{d^2y}$ en el supuesto de ds constante, que es el del problema; tendremos $-\frac{dxdy^2}{d^2y} = Ads$, ó $dx = -Ads.\frac{d^2y}{dy^2}$, cuya integral es $x + C = .\frac{Ads}{dy}$, ó $x + C = \frac{A\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dy}$; lo que da $dy = \frac{Adx}{\sqrt{[(x+C)^2 - A^2]}}$, equacion de la catenaria comun. Bien pronto determinarémos la segunda constante C.

COROLARIO.

8 Suponiendo el exe vertical CO tirado por el punto mas elevado de la curva, la divide en dos partes iguales y semejantes; y esto, aun quando no tengan la misma altura las impostas, siempre que en este último caso nos imaginemos prolongados los brazos de la curva. Se debe pues tener $\frac{dx}{dy} = 0$, quando $x = 0$.

Tambien $C^2 - A^2 = 0$, ó $C = A$; y la equacion de la curva se transforma en $dy = \frac{Adx}{\sqrt{(2Ax + x^2)}}$, de donde sale, integrando de modo que $x = 0$ da $y = 0$, $y = A \cdot L \left(\frac{A + x + \sqrt{(2ax + x^2)}}{A}\right)$.

Si se supone ahora que la abscisa $CO = a$ corresponde á la ordenada $oA = b$, se tendrá la equacion b.................................. $= A \cdot L \left[\frac{A + a + \sqrt{(2aA + a^2)}}{A}\right]$, entre las tres cantidades constantes A, a, b; por donde se ve que conociendo ó tomando á voluntad dos de ellas, se conocerá la tercera.

Advertencia.

9 Muchos prácticos, engañados por la propiedad que tiene la catenaria de estar en equilibrio en toda su extension, quando son iguales é igualmente pesadas todas las dovelas, emplean por lo comun esta curva, sin atender que se rompe este equilibrio quando se carga la bóveda con pesos extraños y desiguales. Por otra parte estas bóvedas tienen un empuje considerable, á menos que no sean extremamente peraltadas.

EXEMPLO II.

10 *Se suponen verticales todas las fuerzas* ϕ, *pero variables en cantidad y proporcionales, en cada punto de la curva, á una funcion dada de la abscisa correspondiente.*

Este caso se verifica, por exemplo, en los arcos de los puentes, quando estan cargados de tierra y mampostería, á alturas desiguales encima de las diferentes dovelas. Entonces las presiones ϕ varían sobre los puntos del intrados ACA' de un punto al otro, segun cierta ley, que supongo tal, que cada fuerza ϕ dependa de la abscisa correspondiente x, y de cantidades constantes conocidas.

En esta hipótesis se tiene $\text{sen.}\, u = 0$, $\cos.\, u = 1$; y la equacion (C) se transforma en

$$2R\phi d^2y + \phi dy dR + R dy d\phi = 0;$$

ó multiplicándola por dy, $2R\phi dy d^2y + \phi dy^2 dR + R dy^2 d\phi = 0$, cuya integral es $R\phi dy^2 = A^2 ds^2$; ó poniendo por R su va-

lor $-\frac{dsdx}{d^2y}$, $\phi dx = -A^2 ds . \frac{d^2y}{dy^2}$, cuya integral es $\int \phi dx + C .. = \frac{A^2 ds}{dy}$. Eliminando ds, y separando las indeterminadas, se halla para la equacion de la curva

$$dy = \frac{A^2 dx}{\sqrt{[(\int \phi dx + C^2)^2 - A^4]}}.$$

Se integrará exâctamente, ó por aproxîmacion $\int \phi dx$, poniendo por ϕ su valor dado en x y constantes; y las constantes introducidas por la integracion se determinarán por las condiciones de que la curva pasa por los tres puntos dados A, C, A′.

EXEMPLO III.

11 *Se suponen las fuerzas* ϕ *perpendiculares al intrados* ACA′, *y proporcionales á una funcion de la abscisa y de constantes.*

Sucede esto quando se destina la bóveda á aguantar agua ó tierras líquidas hasta cierto punto: entonces cada punto de la curva ACA′ se halla oprimido perpendicularmente por una fuerza que depende de la profundidad á que se halla.

En esta hipótesis se tiene sen. $u = \frac{dx}{ds}$, cos. $u = \frac{dy}{ds}$; y por consiguiente la equacion general (C) se transforma en

$$o = 3R\phi(dyd^2y + dxd^2x) + (dx^2 + dy^2)(\phi dR + Rd\phi);$$

ó bien (por causa de ds constante, que da $dxd^2x + dyd^2y = o$)

$$\phi dR + Rd\phi = o,$$

cuya integral es $\phi R = A^2$. Así $\phi dx = \frac{A^2}{R} dx = -\frac{Ad^2y}{ds}$, poniendo por R su valor $-\frac{dsdx}{d^2y}$. Luego $\int \phi dx = B^2 - \frac{A^2 dy}{ds}$, de donde sale (poniendo por ds su valor, y separando las indeterminadas)

$$dy = \frac{(B^2 - \int \phi dx)\, dx}{\sqrt{[A^4 - (B^2 - \int \phi dx)^2]}}:$$

equacion diferencial de la curva.

Si la bóveda ACA′ (*fig. 5*) aguanta un verdadero fluido representado por ACA′HZKC, y que VC sea la altura conocida

de este fluido sobre la clave: entonces la presion perpendicular sobre cada punto de la curva $= c + x$, haciendo $Vc = c$; y la integral de $\int \varphi dx = \frac{x^2}{2} + cx$. Por consiguiente la equacion de la curva será

$$dy = \frac{(2B^2 - x^3 - 2cx)\,dx}{\sqrt{[4A^2 - (2B^2 - x^2 - 2cx)^2]}}.$$

El segundo miembro puede integrarse por medio de la rectificacion de las *secciones cónicas.*

EXEMPLO IV.

12 *Se supone que cada punto de la curva* ACA′ (fig. 6) *se halla oprimido por dos fuerzas, la una vertical, la otra perpendicular á la curva; y estas fuerzas son funciones qualesquiera de la abscisa* x.

Se puede suponer que las fuerzas de la primera especie provienen del peso mismo de las dovelas ó de las tierras, y las de la segunda de las presiones de un fluido que cubriese á lo menos una parte de la bóveda.

Sea en el punto M, por exemplo, Ml la fuerza vertical, Mh la fuerza perpendicular á la curva, y conclúyase el paralelógramo $Mlgh$. La diagonal Mg expresará la fuerza que hemos llamado φ, y el ángulo gMl será el que hemos llamado u. Tiremos gf perpendicular á Ml prolongada, y representemos la fuerza vertical Ml por p, la fuerza perpendicular á la curva por q (siendo p y q funciones qualesquiera de x). Se tendrá $gf = lg \times \text{sen.}\, glf = Mh \times \text{sen.}\, MNr = q\frac{dx}{ds}$; $lf = Mh \times \cos.\, MNr = \frac{qdy}{ds}$; $Mf = p + \frac{qdy}{ds}$. Por otra parte, $gf = Mg \times \text{sen.}\, gMf = \varphi\, \text{sen.}\, u$, $Mf = Mg \times \cos.\, gMf = \varphi \cos.\, u$. Así, $\varphi\, \text{sen.}\, u = q\frac{dx}{ds}$; $\varphi \cos.\, u = p + \frac{qdy}{ds}$; $d(\varphi\, \text{sen.}\, u) = \frac{qd^2x}{ds} + \frac{dxdq}{ds}$; $d(\varphi \cos.\, u) = dp + \frac{qd^2y}{ds} + \frac{dydq}{ds}$.

Substituyamos estos valores de $\varphi\, \text{sen.}\, u$, $\varphi \cos.\, u$, $d(\varphi\, \text{sen.}\, u)$ $d(\varphi \cos.\, u)$, en la equacion general (C), y encontrarémos

$$0 = \begin{cases} 2Rpd^2y + pdRdy + Rdydp + \frac{3Rq}{ds}(dyd^2y + dxd^2x) \\ + \left(\frac{qdR + Rdq}{ds}\right)(dx^2 + dy^2); \end{cases}$$

ó (por causa de $dxd^2x+dyd^2y=0$, que da el supuesto de ds constante, y $ds^2=dy^2+dx^2$).

$$0=2Rpd^2y+pdRdy+Rdydp+qdRds+Rdqds.$$

El primer término $2Rpd^2y$ es lo mismo que Rpd^2y+Rpd^2y, ó que $-pdsdx+Rpd^2y$, poniendo en el primero por R su valor $-\frac{dsdx}{d^2y}$. Así nuestra equacion se transforma en

$$0=-pdsdx+Rpd^2y+pdRdy+Rdydp+qdRds+Rdqds,$$

cuya integral es $A^2ds=-ds\int pdx+pRdy+qRds$; ó poniendo por R su valor $-\frac{dsdx}{d^2y}$

$$A^2=-\int pdx-\frac{pdxdy}{d^2y}-\frac{qdxds}{d^2y};\text{ ó}$$

$$-A^2d^2y=d^2y\int pdx+pdxdy+qdxds,$$

cuya integral es $B^2ds-A^2dy=dy\int pdx+ds\int qdx$; lo qual da, eliminando ds, y separando las indeterminadas,

$$dy=\frac{(B^2-\int qdx)dx}{\sqrt{[(\int pdx+A^2)^2-(B^2-\int qdx)]}}.$$

Si la fuerza vertical p es constante, y la perpendicular es igual á $x+c$, se tendrá

$$dy=\frac{(2B^2-x^2-2cx)^2dx}{\sqrt{[4(px+A^2)^2-(2B^2-x^2-2cx)^2]}}.$$

Exemplos de la segunda qüestion del artículo 6.

EXEMPLO I.

13 *En el supuesto de que todas las fuerzas* φ (fig. 4) *sean verticales, se pide la expresion general de* Φ, *sea la que se fuese la curva, pero cuya naturaleza se conoce.*

Primeramente la equacion (C) del artículo 5 se transforma (por causa de sen. $u=0$, cos. $u=1$) en

$$\varphi(2Rd^2y+dRdy)+Rdyd\varphi=0,$$

ó multiplicándola por dy

$$2R\varphi dyd^2y+\varphi dRdy^2+Rdy^2d\varphi=0,$$

cuya integral es $\phi R dy^2 = A^2 ds^2$. Luego $\phi = \frac{A^2 ds^2}{R dy^2}$; cuya fórmula, en cada caso particular, dará el valor de ϕ en cantidades finitas, poniendo por R, ds, dy, sus valores dados por la naturaleza de la curva.

COROLARIO.

14 Supongamos, por exemplo, que el intrados ACA' sea una semi-elipse, rebaxada ó peraltada, cuyo semi-exe CO $= a$, el semi-exe oA $= b$; se encontrará $\frac{ds^2}{R dy^2} = \frac{ab^2}{(b^2 - y^2)\sqrt{(b^4 - b^2y^2 + a^2y^2)}}$.
Así

$$\phi = \frac{A^2 ab^2}{(b^2 - y^2)\sqrt{(b^4 - b^2y^2 + a^2y^2)}}.$$

Para determinar la constante A, supongamos que en el vértice C, ó $y = 0$, esté representada la fuerza φ por mg, siendo g la gravedad, m una línea constante dada: se tendrá $mg = \frac{A^2 a}{b^2}$, y por consiguiente $A^2 = \frac{mgb^2}{a}$; de suerte que................................

$$\phi = \frac{mgb^4}{(b^2 - y^2)\sqrt{(b^4 - b^2y^2 + a^2y^2)}}.$$

Se ve por esta expresion que las fuerzas φ aumentan desde el vértice C hasta los arranques A, A', en que se hacen infinitas. Así las bóvedas elípticas, sobre todo las rebaxadas, deben de estar muy cargadas hácia los arranques y los riñones para que sean sólidas.

Si se quiere conocer la relacion de las fuerzas ϕ en el vértice C de la elipse, y en el punto M, suponiendo que el ángulo COM sea de 45 grados; se atenderá que en este caso OR $=$ RM, lo que da $y^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$. Luego en el punto M se tiene $\varphi = \frac{m(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}} g}{b\sqrt{(a^4 + b^4)}}$, siendo así que en el punto C se tiene $\varphi = mg$. Así la presion en el vértice C es á la presion en el punto M de 45 grados, como $b\sqrt{(a^4 + b^4)}$, es á $(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}$, cuya razon viene á ser la de 1 á 2, quando $a = b$, ó lo que es lo mismo, quando la curva ACA' es un semi-círculo.

Los grandes aumentos de presion se hacen desde los puntos de 45 grados hasta los arranques de la bóveda. Luego general-

mente es esencial fortificar bien las bóvedas circulares y elípticas desde los riñones hasta los arranques. En efecto, por aquí es por donde perecen por lo comun estas suertes de bóvedas.

EXEMPLO II.

15 Suponiendo las direcciones de las fuerzas φ perpendiculares á la curva ACA′ (*fig. 4*), se pide la expresion general de φ, sea la que fuese esta curva, cuya naturaleza es dada.

Tenemos aquí, como en el artículo 11, sen. $u = \frac{dx}{ds}$, cos. $u = \frac{dy}{ds}$; y procediendo como en este mismo artículo, se encuentra $\varphi R = A^2$, $\varphi = \frac{A^2}{R}$. Así se tendrá φ poniendo por R su valor dado por la naturaleza de la curva.

COROLARIO.

16 Sea ACA′ una semi-elipse, cuyo semi-exe $CO = a$, el semi-exe $oO = b$, se hallará $R = \frac{(b^4 + a^2y^2 - b^2y^2)^{\frac{3}{2}}}{ab^4}$; y por consiguiente

$$\varphi = \frac{A^2ab^4}{(b^4 + a^2y^2 - b^2y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Suponiendo la presion en el vértice C representada por mg, se tendrá $mg = \frac{A^2a}{b^2}$; ó $A^2 = \frac{mgb^2}{a}$.

Se sigue de esto que la presion en el vértice, ó $y = 0$, es á la presion en los arranques A, A′, ó $y = b$, como a^3 es b^3; y que la presion en el vértice C es á la presion en el punto de 45 grados, ó $y^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$, como $(a^4 + b^4)^{\frac{3}{2}}$ es á $b^3(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}$. Así deben de aumentar ó disminuir las presiones de las dovelas desde la clave hasta las impostas, segun sea la bóveda rebaxada ó peraltada. No tengo necesidad de añadir que las presiones siempre serán las mismas, quando la bóveda es semicircular, ó quando $a = b$.

PROBLEMA II.

17 *Suponiendo en equilibrio el sistema de todas las dovelas que componen una bóveda; se pide el grueso que deben de tener los pies derechos para sostener el empuje.*

Puesto que todas las partes de la bóveda estan en equilibrio, y que por consiguiente se la puede mirar como un todo contínuo, se ve que la qüestion se reduce á poner en equacion, entre dos planos inclinados representados por las dos juntas inferiores extremas de la bóveda, esta misma bóveda, cuya figura es dada, y cuyo peso tambien es dado, ó capaz de determinarse por la naturaleza del intrados y de las fuerzas que la oprimen.

EXEMPLO I.

18 *La curva* ACA′ (fig. 7) *es una catenaria vuelta; todas las dovelas, miradas como infinitamente pequeñas, son iguales é igualmente pesadas* (art. 7): *los puntos* A, A′ *estan á una misma altura: se trata de determinar el grueso* DF *que se necesita dar al pie derecho* AF, *considerado como un rectángulo sólido, que procura venirse abaxo girando al rededor del punto fixo* F.

Habiendo hecho la abscisa CR$=x$, la ordenada MR $=y$, el arco elemental M$m= ds$, la montea CO$=a$, la semi-base oA$=b$: se tiene por equacion diferencial de la curva $dy=\frac{Adx}{\sqrt{(2Ax+x^2)}}$; y de aquí se tiene (8), entre las tres cantidades A, a, b, la equacion $b=$ A . L . $\left(\frac{A+a+\sqrt{(2A+a^2}}{A}\right)$. Así se debe mirar A como dada.

Hallándose oprimido verticalmente cada punto del elemento ds por la gravedad g, la fuerza aplicada á todos los puntos de ds es gds. Pero, por causa de $dy=\frac{Adx}{\sqrt{(2Ax+x^2)}}$, se halla ds........ $=\frac{Adx+xdx}{\sqrt{(2Ax+x^2)}}$, y por consiguiente $s=\sqrt{(2Ax+x^2)}$. Así, haciendo $x=a$, se tendrá $\sqrt{(2Aa+a^2)}$ para la longitud del arco cA, y $2\sqrt{(2Aa+a^2)}$ para la del intrados entero ACA′. Sea el grueso cc de la dovela del vértice $=c$, el peso total de la bóveda será $2gc\times\sqrt{(2Aa+a^2)}$. Para abreviar, representaré la area $2c\sqrt{(2Aa+a^2)}$ por la simple letra M.

La accion del peso gM se exerce segun la vertical QCO. Tírense por los puntos extremos A, A′ de la curva las dos tangentes AQ, A′Q, que se encuentran en Q sobre la verrical OC prolongada indefinidamente; y habiendo tomado QN para representar el peso gM, descompongo esta fuerza en otras dos QI, QS. Se tendrá, *fuerza* QI $= gM \times \frac{\text{sen. AQO}}{\text{sen. 2AQO}} = \frac{gM}{2 \cos. \text{AQO}}$ .... $= \frac{gM(A + a)}{2\sqrt{(2Aa + a^2)}}$, observando que en general el valor del coseno del ángulo que forma el elemento ds con la vertical, es $g \frac{dx}{ds}$ ó $\frac{\sqrt{(2Ax + x^2)}}{A + x}$, y haciendo despues $x = a$. Supongo que la fuerza OI se aplique en el punto A de su direccion; y despues la descompongo en otras dos, la una horizontal, y la otra vertical. El valor de la primera de estas dos fuerzas es en general *fuerza* QI $\times \frac{dy}{ds}$, ó *fuerza* QI $\times \frac{A}{A + x}$; y el valor de la otra es *fuerza* QI $\times \frac{dx}{ds}$, ó *fuerza* QI $\times \frac{\sqrt{(2Ax + x^2)}}{A + x}$. Luego, haciendo $x = a$, y poniendo por *fuerza* QI su valor, la expresion de la fuerza horizontal, en el punto A, será $\frac{gM \cdot A}{2\sqrt{(2Aa + a^2)}}$, y la de la fuerza vertical será $\frac{gM}{2}$. Pero la fuerza horizontal procura derribar el pie derecho, haciéndole girar al rededor del punto F, y la fuerza vertical concurre, con el peso del pie derecho, á mantenerle sobre su base. Así, llamando h la altura dada Ad del pie derecho, z su base DF desconocida, y por consiguiente ghz su peso, se tendrá la equacion de equilibrio:

$$\frac{gM \cdot A \cdot h}{2\sqrt{(2Aa + a^2)}} = \frac{gM \cdot z}{z} + \frac{ghz^2}{2};$$

de donde sale (haciendo para abreviar $\frac{A}{\sqrt{(2Aa + a^2)}} = n$),

$$z = -\frac{M}{2h} + \frac{\sqrt{(M^2 + 4nMh^2)}}{2h}.$$

No empleo sino el signo superior del radical para que sea positivo el valor de z.

Son muy fáciles las aplicaciones numéricas para detenernos en ellas.

EXEMPLO II.

19 *Sea el intrados* ACA′ *una parábola* (fig. 8) *cuyo exe* CO *sea vertical*; *y que todas las fuerzas* φ *obren verticalmente.*

Todas las fuerzas φ son paralelas, pero no son iguales en cantidad como en el exemplo anterior, y así es necesario empezar por hallar su suma ó su resultante.

Supongamos $CO = a$, $oA = b$, el parámetro de la parábola $= \frac{b^2}{a} = k$; una abscisa qualquiera $CR = x$, la ordenada RM $= y$; el elemento Mm de la curva $= ds$.

Aquí se tiene sen. $u = 0$, cos. $u = 1$; y se encuentra primeramente en general (*art. 13*) $\varphi = \frac{A^2 ds^2}{R dy^2}$. Poniendo por la fraccion $\frac{ds^2}{R dy^2}$ su valor $\frac{2}{\sqrt{(k^2 + 4y^2)}}$, dado en este caso en funcion de k y de y, por la naturaleza de la parábola, se tendrá............ $\varphi = \frac{2A^2}{\sqrt{(k^2 + 4y^2)}}$.

Supongamos que en el vértice C el valor de la fuerza φ sea cg, siendo g la gravedad, c una línea constante, que expresa el grueso de la bóveda en el vértice, se tendrá $cg = \frac{2A^2}{k}$, y por consiguiente $2A^2 = kcg$. Así en general $\varphi = \frac{kcg}{\sqrt{(k^2 + 4y^2)}}$.

Pero siendo $\frac{kcg}{\sqrt{(k^2 + 4y^2)}}$ la presion vertical que sufre cada punto de ds, la presion total de ds será $\frac{kcg\,ds}{\sqrt{(k^2 + 4y^2)}}$. Poniendo por ds su valor $\frac{dy\sqrt{(k^2 + 4y^2)}}{k}$, esta presion se transformará en $cgdy$, y la presion sobre el arco finito $CM = cgy$, la presion sobre $cA = cgb$; y en fin, la presion sobre todo el intrados ACA′ $= 2cgb$.

Por los puntos extremos A, A′ tiremos á la parábola las tangentes AQ, A′Q que van á encontrarse en el punto Q, sobre la prolongacion del exe CO. Haciendo como en el exemplo anterior, tomo QN para representar la fuerza $2cgb$, y la descompon-

go en otras dos QI, QS. El valor de la fuerza QI será.................

$$2bcg \frac{\text{sen. AQO}}{\text{sen. 2AQO}},\ \text{ó}\ bcg \times \frac{\text{AQ}}{\text{QO}}.$$

Aplico esta fuerza en el punto A, y la descompongo en otras dos, la una horizontal, que procura derribar el pie derecho, la otra vertical, que concurre con el peso del pie derecho á afirmarle sobre su base. El valor de la primera es $bcg \times \frac{\text{AQ}}{\text{OQ}} \times \frac{\text{OA}}{\text{AQ}}$, ó $bcg \times \frac{\text{OA}}{\text{OQ}}$, ó en fin $\frac{b^2cg}{2a}$; el de la segunda es bcg. Así, haciendo AD$=h$, DF$=z$, la equacion del equilibrio será $\frac{gb^2ch}{2a}=gbcz + \frac{ghz^2}{2}$, de donde sale

$$z = -\frac{bc}{h} + \frac{\sqrt{\left(b^2c^2 + \frac{b^2ch^2}{a}\right)}}{h}.$$

CAPITULO III.

De la figura que se necesita dar á las caras laterales y exteriores de los pies derechos, suponiendo se puedan romper por hiladas horizontales.

20 Hasta aquí he mirado los pies derechos de una bóveda como macizos rectangulares contínuos, que no pueden venirse abaxo sin romperse. Pero puede suceder que un pie derecho no resista igualmente en toda su altura, y que una parte procure separarse de la otra, segun una seccion horizontal, al modo con que un pedazo de madera se rompe quando se le carga con pesos; no obstante se diferencia en que el pedazo de madera, compuesto de fibras extensibles, se dobla antes de romperse, en lugar que un macizo de mampostería se rompe de repente y sin doblarse. Voy pues á suponer que formando siempre la cara interior de un pie derecho una recta vertical, la cara exterior debe de tener una cierta curvatura, tal que pueda dividirse el pie derecho por secciones horizontales, y que no obstante quede en equilibrio por medio de la fuerza de adherencia de las partes, combinada con los esfuerzos de la gravedad. M. Æpino ha tratado una qüestion semejante en las memorias de la Academia de Berlin del año 1755: mira la parte superior de una bóveda como una cuña que procura separar todo lo restante del macizo inferior, consideran-

do como un solo cuerpo que procura dividirse por secciones horizontales. Pero en este esfuerzo que exerce perpendicularmente sobre los dos planos inclinados formados por los coxinetes, no se atiende mas que á la fuerza horizontal, y se desprecia la fuerza vertical, que tambien resulta, cuya omision facilita el problema; pero no es permitida. No se debe pues extrañar que M. Æpino y yo lleguemos á resultados muy diferentes.

PROBLEMA.

21 *Considerando la bóveda* ACA′, *d′ca* (fig. 9) *como un cuerpo sólido colocado entre dos planos inclinados* A*a*, A′*a*′, *que representan los coxinetes: se pide la curva* AMF, *que debe de formar la cara exterior del pie derecho* AF *en el estado de equilibrio, siendo la cara interior* A*d una recta vertical, y suponiendo al pie derecho fuertemente detenido sobre su base, y no pudiendo romperse sino por secciones horizontales.*

Sean AP y PM las coordenadas perpendiculares de la curva AMF de un punto qualquiera M. Habiendo tirado por los puntos A, A′, perpendicularmente á los coxinetes, ó á las juntas extremas A*a*, A′*a*′, las rectas AQ, A′Q, que van á encontrarse en Q sobre la prolongacion del exe vertical, tomo QN para representar el peso de la bóveda; le descompongo en otras dos fuerzas QI, QS, supongo que se aplique en A la fuerza QI, y la represento por A*h* = QI; descompongo la fuerza A*h* en otras dos, la una horizontal A*q*, la otra vertical A*f*.

Esto supuesto, se ve que la fuerza horizontal A*q* procura derribar el macizo APM, haciéndole girar al rededor del punto M, quando por el contrario la fuerza vertical A*f*, el peso del macizo APM, y la fuerza de adherencia de las dos partes APM, PDFM, procuran hacerle girar en sentido contrario, y por consiguiente mantener la parte APM sobre la base PM. No se trata ya sino de establecer el equilibrio de estas quatro fuerzas.

Sean
- la gravedad .... $= g$
- el seno total .... $= 1$
- el ángulo AQO .... $= m$
- el ángulo AQA .... $= n$
- AP .... $= x$
- PM .... $= y$
- la fuerza QN .... $= gQ$
- (siendo Q una superficie dada).

En primer lugar se tendrá evidentemente fuerza $Ah = gQ \times \frac{\text{sen. } m}{\text{sen. } n}$; fuerza $Aq = gQ \times \frac{(\text{sen. } m)^2}{\text{sen. } n}$; fuerza $Af = gQ$....... $\times \frac{\text{sen. } m \text{ cos. } m}{\text{sen. } n}$; el peso del macizo $APM = g\int ydx$. Harémos, para abreviar, $\frac{Q \text{ sen. } m^2}{\text{sen. } n} = V$, $\frac{Q \text{ sen. } m \text{ . cos. } m}{\text{sen. } n} = T$.

Considerando los momentos de las dos fuerzas Aq, Af, y el del peso APML, con respecto al punto M, se tendrá: momento de fuerza $Aq = gVx$, momento de la fuerza $Af = gTy$, momento del peso $APM = g\int ydx \left(y - \frac{\int y^2 dx}{2\int ydx}\right) = gy\int ydx$............... $-g\int \frac{y^2 dx}{2}$.

Se debe de considerar la fuerza de adherencia de las dos partes APM, PdFM del pie derecho como la suma ó la resultante de una infinidad de pesos iguales, representados cada uno por una línea dada k, los quales estarian unidos á todos los puntos de la línea PM. Así el valor de esta fuerza resultante es gky, y su direccion pasa por el medio de PM; de donde se sigue que su momento con respecto al punto M es $\frac{gky^2}{2}$.

De todas estas expresiones resulta que la equacion de equilibrio, entre los momentos de las fuerzas que deben de equilibrarse, es (dividiéndola por g)

$$Vx = Ty + y\int ydx - \frac{\int y^2 dx}{2} + \frac{ky^2}{2} \text{ .... (X)}:$$

diferenciando los dos miembros de esta equacion, tendrémos

$$Vdx = Tdy + dy\int ydx + \frac{y^2 dx}{2} + kydy.$$

Volvámosla á diferenciar: haciendo dy constante, saldrá

$$Vd^2x = 2ydxdy + \frac{y^2 d^2x}{2} + kdy^2.$$

Hago ahora $dx = zdy$, y por consiguiente $d^2x = dzdy$: lo qual muda la equacion precedente en esta otra

$$(2V - y^2)dz - 4yzdy - 2kdy = 0.$$

Multipliquémosla por $2V - y^2$: tendrémos

$$(2V - y^2)^2 dz - 4yzdy(2V - y^2) - 2kdy(2V - y^2) = 0,$$

cuya integral es $(2V - y^2)^2 . z - 4kVy + \frac{2ky^3}{3} = A$.

Pongamos por z su valor $\frac{dx}{dy}$, tendrémos

$$(2V - y^2)^2 dx - 4kVydy + \frac{2ky^3 dy}{3} = Ady,$$

ó $dx = \frac{\left(A + 4kVy - \frac{2ky^3}{3}\right)dy}{(2V - y^2)^2}$: equacion separada, cuyo segundo miembro es integrable, en parte algebráicamente, en parte por logaritmos. Efectuando esta integracion, se tendrá una equacion finita entre x é y, y cantidades dadas, en cuya equacion entrará una segunda constante B.

Para determinar las dos constantes A y B se observará: 1.º que haciendo $x = 0$, el primer miembro de la equacion general (V) se hace nulo, y que los tres últimos términos del segundo miembro, relativos al macizo APM, que tambien se reduce á cero, se desvanecen igualmente, de donde resulta $Ty = 0$, y por consiguiente $y = 0$. Así $x = 0$ da $y = 0$: lo que produce, entre A y B y los datos del problema, una primera equacion. 2.º Siendo dada la posicion del coxinete Aa; si se supone, por exemplo, perpendicular á la curva AMF, se tendrá en el orígen $\frac{dy}{dx} = \frac{\text{sen.}\, m}{\text{cos.}\, m}$; lo qual da una segunda equacion de condicion entre A y B y constantes: se conocerá pues A y B. Haciendo despues $x = AD = h$ en la equacion final entre x é y, se tendrá el valor de la última ordenada, ó el grueso del pie derecho correspondiente á la base.

SECCION II.

Del equilibrio de las medias-naranjas.

22 La teoría que he dado en la seccion precedente del equilibrio de las bóvedas de cañon seguido se aplica tambien á las medias-naranjas, salvo las modificaciones ó diferencias que resultan de la diferente manera con que se engendran estas dos especies de bóvedas. Se sabe que las primeras estan producidas por el movimiento de una curva que se mueve paralelamente á sí misma, las otras por el movimiento de revolucion de una curva al rededor de un exe vertical; pero del mismo modo que á una bóveda de cañon seguido se la puede mirar como el conjunto de una infinidad de bóvedas infinitamente delgadas, colocadas para-

lelamente las unas al lado de las otras: así tambien es menester imaginar en las medias-naranjas una infinidad de planos, que se cortan segun el exe de revolucion, los quales determinan de este modo una infinidad de bóvedas elementales, que forman ángulos entre sí, y aumentan en latitud desde el vértice hasta las impostas. En este caso la qüestion será establecer las condiciones de equilibrio entre estas bóvedas parciales, cada una de las quales se compone de dos porciones iguales y semejantes, colocadas á uno y otro lado del exe.

Es evidente que si las medias-naranjas, en lugar de tener círculos por bases, que es lo mas comun, y lo que supongo, tuviesen elipses, polígonos regulares simétricos, se las podria igualmente descomponer en bóvedas parciales y elementales, en las quales se establecerán las condiciones de equilibrio por los mismos medios que voy á emplear para las medias-naranjas propiamente tales.

CAPITULO II.

Determinacion del grueso que se necesita dar á los pies de una media-naranja, para resistir al empuje del casquete superior, considerándole como un cuerpo separado.

23 El problema de que se trata aquí es análogo al de la Hire para las bóvedas de cañon seguido: era absolutamente nuevo, quando di la solucion á la Academia de Ciencias en 1770, con motivo de la media-naranja de Santa Genoveva, como ya lo he dicho. Habian determinado algunos mecánicos el grueso de los pies derechos de esta media-naranja por medio de la fórmula de la Hire; pero esta solucion era puramente hipotética é insuficiente, vista la diversidad de los dos casos.

PROBLEMA.

24 *Sea* (fig. 10) *una media-naranja producida por la revolucion del espacio comprehendido entre la curva del intrados* ACA′ *y la curva del extrados* aca′ *al rededor de la montea vertical* OCa*: supongamos que esta media-naranja procure romperse en las direcciones dadas de las juntas* ZX, Z′X′ *inclinadas al horizonte, y perpendiculares á la curva del intrados, de manera que la parte superior* ZXcX′Z′C *pueda mirarse como un solo y mismo cuerpo, y que la parte* AZXa (lo mismo para el otro lado de la bóveda) *no forme con el pie derecho correspondiente* ADFT *mas que un solo y mismo*

macizo sólido en toda su extension, el qual, girando al rededor del punto F, *se cae quando se desune la bóveda: se pide el espesor* DF *que debe tener para que haya equilibrio.*

I.

Segun la idea general que se ha indicado (*art.* 22) hago pasar por el exe vertical YOC de la media-naranja dos planos YKL$t\alpha c$C, Y$kln\mathfrak{G}c$C, que forman entre sí un ángulo infinitamente pequeño, y que prolongados convenientemente, determinan á uno y otro lado del exe dos porciones iguales y correspondientes en la parte superior de la media naranja, y otras dos porciones tambien iguales y correspondientes en la parte inferior. Para que haya equilibrio se necesita que se halle en la direccion QCO del peso ZXcX′Z′C un punto Q, desde el qual se puedan baxar dos perpendiculares sobre las juntas XZ, X′Z′. Representemos el peso de que se trata por QN, y descompongamos esta fuerzas en otras dos QI, QS, las quales expresarán los esfuerzos que el sistema de las dos porciones superiores exerce contra el sistema de las dos porciones inferiores.

II.

Imaginemos que la fuerza QI se aplique al punto G de su direccion, y representémosla por Gh = QI; descompongamos la fuerza Gh en otras dos fuerzas Gq, Gf, la una horizontal, y la otra vertical. Se ve que la fuerza horizontal Gq procura derribar la porcion inferior al rededor del punto medio F, ó mas bien de la recta LFl, perpendicular á la seccion media YFTAZX; y que al contrario la fuerza vertical Gf conspira, con el peso de la porcion, á mantenerla. No se trata pues ya mas que de establecer la equacion de equilibrio, segun esta consideracion.

Para abreviar un poco el cálculo, á la porcion, representada por su perfil medio AaZX, substituiré una porcion de la misma base y de la misma altura, representada por su perfil medio A$ax\lambda$, lo que puede muy bien hacerse. Por otra parte será fácil, en cada caso particular, tener en cuenta la verdadera figura de la porcion, si se tuviese por conveniente. Ademas, tomaré la gravedad = 1, suponiendo todo el sistema de una misma materia homogénea.

III.

Que se tire desde el punto indeterminado R del exe las rectas RP, Rr, Rp, en el plano medio vertical de las porciones, y en los planos verticales que las terminan. Tírense á los pequeños arcos mn, pr, considerados como líneas rectas, los pequeños arcos ó rectas infinitamente próxîmas $d\delta$, ee.

Supongamos

el seno total.. $= 1$
el ángulo dado OQG.. $= m$
el ángulo infinitamente pequeño LYl, ó pRr. $= \pi$
OA ó RM.. $= b$
Aa.. $= a$
Ad ó TF.. $= h$
AG ó VG.. $= k$
AV ó DH.. $= i$
Rz.. $= y$
la doble porcion producida por la revolucion de ZXcX'Z'C al rededor de CO......... $= 2\pi$S
(siendo S una cantidad dada por el espesor de la media-naranja)
el grueso desconocido DF del pie derecho...... $= z$,

se tendrá, fuerza Gh $= \frac{2\pi S . \text{sen.}\, m}{\text{sen.}\, 2m}$; fuerza Gq $= \frac{2\pi S . (\text{sen.}\, m)^2}{\text{sen.}\, 2m}$ $= \pi S . \text{tang.}\, m$; fuerza G$f$ $= \pi$S. Si se consideran los momentos de las dos fuerzas Gq, Gf, con relacion al punto F, se tendrá

Momento de la fuerza Gq $= \pi S . \text{tang.}\, m\, (h + k)$
Momento de la fuerza Gf $= \pi S . (i + z)$.

El pequeño trapecio $d\delta ee = zi \times d\delta = \pi y dy$; y su momento, con relacion al punto F, es $\pi y dy . (b + z - y)$, cuya integral es $\frac{\pi (b+z) y^2}{2} - \frac{\pi y^3}{3} + A$: integral que, debiéndose desvanecer quando $y = b$, y recibir su valor completo quando $y = b + z$, se transforma finalmente en $\frac{\pi (z^3 + 3bz^2)}{6}$. Siendo esta expresion el momento de la capa $mnrp$, y estando la porcion φKkLltu compuesta de una infinidad de capas, todas iguales, y puestas las unas sobre las otras, el momento de esta porcion es $\frac{\pi h (z^3 + 3bz^2)}{6}$.

Aplicando el mismo cálculo á la porcion representada por el perfil $A\lambda x a$, y observando que en este caso la integral $\frac{\pi(b+z)y^2}{2} - \frac{\pi y^3}{3} + A$, debe de desvanecerse quando $y = b$, y recibir su valor completo quando $y = b + c$, se encontrará que el momento de esta porcion es $\frac{\pi k}{6}(6bcz + 3c^2z - 3bc^2 - 2c^3)$.

Igualando el momento de la fuerza Gq á la suma de los tres momentos, y quitando el factor comun π, se tendrá la equacion fundamental del equilibrio.

$$S \tan g. m\,(h+k) = S\,(i+z) + \frac{h(z^3+3bz^2)}{6} \ldots\ldots + \frac{k(6bcz+3c^2z-3bc^2-2c^3)}{6} \ldots\ldots (A):$$

equacion del tercer grado, que dará á conocer z, ó el grueso DF del pie derecho.

Advertencia 1.ª

25 Sucede por lo comun que la media-naranja tiene en su vértice una especie de linterna, que puede ocasionar una carga considerable: entonces primeramente se necesita buscar, por medio de cada una de las partes de esta linterna, la masa total que resulta: despues se convertirá en un cilindro V (*fig. 11*) concéntrico con la media-naranja, de la misma materia que ella, y de base y de altura conocidas.

Esto supuesto, observo que los dos planos verticales que han determinado abaxo la doble porcion 2π S determinan tambien en el cilindro V una doble porcion correspondiente, cuyo esfuerzo se une con el de $2\pi S$, y cuyo valor se necesita hallar. Pero, llamando Π la razon de la circunferencia al diámetro, r el radio de la base del cilindro V, $2f$ su altura, se tendrá primeramente, $2\Pi r$ por la circunferencia del cilindro, y $2\Pi r^2 f$ por su solidez. Despues, considerando que el arco π tiene la unidad por radio, y que por consiguiente el arco que le corresponde en la circunferencia de la base del cilindro V es $\frac{\pi r}{1}$: si se forma esta propor-

cion $2\Pi r : 2\pi r :: 2\Pi r^2 f$: á un quarto término, cuyo quarto término $2\pi r^2 f$ será el doble de la porcion pedida. Así se aplicará aquí la equacion del artículo precedente, poniendo $2\pi S + 2\pi r^2 f$ en lugar de $2\pi S$, ó $S + r^2 f$ en lugar de S, quedando por otra parte todo lo restante lo mismo.

Advertencia 2.ª

26 Por lo comun la parte superior de los pies derechos está coronada con un ático, cuyo peso concurre, con el de las demas construcciones, á cargar los pies derechos. Se puede mirar este ático como una especie de anillo representado en perfil por el rectángulo *adke*, y formando cuerpo con el pie derecho de la parte inferior de la media-naranja, lo qual procurará disminuir el grueso DF, y reducirle á otro D*f*. Suponiendo la base $ae = p$, la altura $ad = q$, el grueso actual $Df = u$, o $A + Aa = b + c = \gamma$ se encontrará, del mismo modo que se ha hecho para la porcion AλX*a* (24, *núm. III*), que el momento de la porcion representada por *adke*, es $\frac{\pi q(6\gamma pu + 3p^2 u - 3\gamma p^2 - 2p^3)}{6}$; cuya expresion es menester añadir al segundo miembro de la equacion general (A), despues de haber escrito *u* por *z*. Ademas, para tener en consideracion el peso de la linterna V, será necesario poner $S + r^2 f$ en lugar de S. Así pues se tendrá siempre una equacion de tercer grado, por medio del qual se sacará el valor de la incógnita *u*.

Advertencia 3.ª

27 Como está en nuestra mano aumentar mas ó menos el macizo del ático, podemos hacer entrar de otro modo este macizo en el cálculo. Para esto, supongamos que quedando todo lo mismo que en el artículo 25, se represente el perfil del ático por el rectángulo A*igm*, cuya base A*m* es igual á la base desconocida D*f* del pie derecho, y cuya altura dada $Ai = q$, tendrémos entonces un pie derecho D*igf*, cuya altura dada *i*D ó $gf = DA + Ai = h + q$: cantidad que representarémos simplemente por H.

De donde, haciendo la incógnita actual $df = t$, saldrá, por el artículo 24 y 25,

$$t^3 + 3bt^2 + \frac{[6(S + r^2 f) + k(6bc + 3c^2)]}{H} t \ldots\ldots$$
$$+ \frac{6(S + r^2 f) i - k(3bc^2 + 2c^3) - 6(S + r^2 f) \operatorname{tang.}(h + k)}{H} = 0:$$ equacion de equilibrio de un uso cómodo en la práctica.

Los datos que entran en esta equacion dependen de la naturaleza de la curva generatriz de la media-naranja, y de la posicion del punto Z en que se supone se rompe la media-naranja.

Advertencia 4.ª

28 Segun algunas experiencias, el punto de rotura Z está en la interseccion de la curva ACA′ con la diagonal OK del rectángulo OCKA.

Adopto esta hipótesis, que debe de conformarse bastante bien con la verdad, sobre todo para las medias-naranjas peraltadas, que es el caso mas comun. Ademas supondré, que la curva del intrados ACA′ es una parábola, como en efecto lo es en la media-naranja del panteon frances, que es lo que he tenido principalmente en consideracion para todo esto. Miraré tambien el extrados *aca′* como una parábola, á lo menos aproxîmadamente.

Determinacion general de los datos del problema, segun el artículo precedente.

29 Sean $OC = a$, $oA = b$, $Oc = a'$, $Oa = b'$; y llamamos siempre $\frac{\Pi}{1}$ la razon de la circunferencia al diámetro, ó $\frac{2\Pi}{1}$ la razon de la circunferencia al radio.

Los triángulos rectángulos semejantes OCK, OEZ dan $EZ = \frac{OE \times CK}{OC}$, ó $(EZ)^2 = \frac{(OE)^2 \times (CK)^2}{(OC)^2}$; y la propiedad de la parábola da $(EZ)^2 = CE \times \frac{b^2}{a} = (OC - OE) \cdot \frac{b^2}{a}$. Igualando entre sí estos dos valores de EZ, y despejando OE, se encontrará $OE = \frac{a(\sqrt{5} - 1)}{2}$. Luego $EZ = \frac{b(\sqrt{5} - 1)}{2}$, y $CE \ldots = \frac{a(3 - \sqrt{5})}{2}$.

Supongamos que ACA′ (*fig. 10*) sea la parábola interior de la media-naranja; que el punto G se confunda con el punto Z; y tiremos la ordenada ZE, que es la misma que la ordenada ZE de la figura 11. Siendo la recta GQ ó ZQ perpendicular á la junta ZX, ó tangente á la parábola en el punto Z, el ángulo ZQE, ó GQO, que hemos llamado m, tiene por expresion de su tangente $\frac{ZE}{QE}$. Así $\tang. m = \frac{ZE}{QE} = \frac{ZE}{2CE} = \frac{b\sqrt{(5-1)}}{2a(3-\sqrt{5})} = \frac{b}{a(\sqrt{5}-1)}$.

El paraboloide, producido por una revolucion entera del segmento parabólico CEZ, al rededor de CE, tiene por valor $\Pi(EZ)^2 \times \frac{CE}{2}$, ó $\frac{\Pi a b^2 \times (7-3\sqrt{5})}{4}$; y del mismo modo el paraboloide, producido por la revolucion del segmento parabólico cEz, al rededor de cE, tiene por valor $\frac{\Pi a' b'^2 \times (7-3\sqrt{5})}{4}$. Llamemos por un momento N el exceso del segundo paraboloide sobre el primero, no atiendo al pequeño sólido producido por el triángulo mixtilíneo ZXz.

En la expresion de la doble porcion $2\pi S$ del artículo 24, el arco elemental π tiene la unidad por radio, y 2Π es la circunferencia entera para el mismo radio 1: se tendrá pues aquí la proporcion $2\Pi : 2\pi :: N : 2\pi . S$; y por consiguiente........................

$$S = \frac{N}{2\Pi} = \frac{(a'b'^2 - ab^2) \times (7-3\sqrt{5})}{8}.$$

Todo lo demas lo dan inmediatamente las dimensiones particulares de la media-naranja.

Aplicacion de la teoría precedente á la media-naranja del panteon frances.

30 En esta media-naranja la parábola ACA′ es tal, que tirando las cuerdas CA, CA′, el triángulo es equilátero; y se tiene AA′ = AC = CA′ = 64 pies; lo que da OC = 55,425 pies; la altura Ad del pie derecho = 44 pies, la altura reducida Ai del ático = 20 pies; el grueso Aa de la bóveda en el arranque = 3 pies, y el grueso CC, en el vértice, = 1 pie y 6 pulgadas; en fin, la linterna se reduce á un cilindro V, que tiene por base un círculo de 15 pies de diámetro, y por altura 10 pies.

Evaluarémos todas estas cantidades en pies lineales, pies quadrados, pies cúbicos, segun sean dichas cantidades líneas, superficies ó sólidos.

Se tiene $a = 55{,}425$; $b = 32$; $a' = 56{,}925$; $b' = 35$; $c = 3$; $k = A\lambda = OE = 34{,}253$; $i = AV = AO - ZE = 12{,}224$; $h = 44$: $q = 20$; $H = h + q = 64$; $r = 7{,}5$; $2f = 10$; $S = 473{,}694$; $r^2f = 281{,}25$; tang. $m = 0{,}467$, número absoluto. Substituyendo todos estos valores en la equacion (B), se transforma en

$$t^3 + 96t^2 + 393{,}503t - 2105{,}659 = 0.$$

Pero el valor de t, que satisface á esta equacion, es al poco mas ó menos, 3,25. Así el grueso del pie derecho debe de ser de 3 pies, 3 pulgadas para el simple estado de equilibrio.

Si por otra parte, quedando todas las demas dimensiones las mismas, se diesen 4 pies de grueso en el arranque Aa de la bóveda, dos pies de grueso Cc en el vértice, y 20 pies de altura en el cilindro V, que representa el peso de la tierra, se encontrará para t un valor un poco mayor que 4 pies.

Sauflot ha dado 5 pies, 8 pulgadas de grueso á los pies derechos en las partes las mas débiles, y 16 pies en las quatro partes principales que corresponden á los centros de los pilares destinados á sostener la media-naranja.

Por donde se ve que no hay que temer que se arruinen los pies derechos. En efecto, no han experimentado ningun movimiento de esta especie. Las columnas se han arruinado por otro motivo que ya he indicado.

CAPITULO II.

Condiciones de equilibrio entre todas las partes de una media-naranja.

31 No se trata ya aquí de una media naranja que se desune por masas finitas: es menester ahora mirar la media-naranja como compuesta de una infinidad de dovelas que deben de equilibrarse mutuamente, y buscar la relacion general que exîste para esto entre la figura de la curva generatriz de la media-naranja y las fuerzas que obran sobre las dovelas: problema semejante al que se resolvió para las bóvedas de cañon seguido en el capítulo II de la seccion precedente. Despues se determinará el grueso de los pies derechos, segun el estado de equilibrio, que es indispensable exîsta de antemano.

PROBLEMA.

32 *Determinar las condiciones de equilibrio entre las fuerzas que obran sobre las dovelas infinitamente pequeñas de una media-naranja.*

Sea el espacio ACO (*fig. 2*) terminado por la montea CO, la ordenada OA de la curva AC, la qual, por su revolucion al rededor de la montea CO, produce el sólido, que llenará lo interior de la media-naranja. Empiezo haciendo, relativamente á la curva CA, la misma construccion y los mismos raciocinios que se han hecho para las bóvedas de cañon seguido, en el artículo 4, observando ademas que entonces las caras laterales ó las juntas de las dovelas formaban planos inclinados; en lugar que en las medias-naranjas estas caras estan situadas en planos verticales, que van todos á cortarse segun el exe de la bóveda. Se ve por esta observacion, que las dovelas de las bóvedas de cañon seguido se pueden representar por superficies; pero las de las medias naranjas tienen tres dimensiones, y forman especies de pirámides truncadas.

Sean (*fig. 4*)

CR .... $= x$
CR′ .... $= x'$
CR″ .... $= x''$
MR .... $= y$
NR′ .... $= y'$
PR″ .... $= y''$
cada uno de los tres elementos iguales MN, NP, PQ. $= ds$
el radio osculador MI .... $=$ R
el radio osculador siguiente NI .... $=$ R′
el ángulo elemental descrito por la ordenada MR, al rededor del punto R, con el radio 1 .... $= \pi$
la fuerza absoluta que impele el trapecio elemental descrito por MN .... $=$ F
la fuerza absoluta consecutiva .... $=$ F′
las fuerzas que obran sobre cada punto de los dos trapecios consecutivos .... φ, φ'
el ángulo CZF de la fuerza F ó φ con el exe .... u
el ángulo consecutivo á u .... u'.

Procediendo como en el artículo citado, tendrémos primeramente $\frac{F}{F'} = \frac{R'}{R} \times \frac{(dy'' \cos. u' + dx'' \operatorname{sen.} u'')}{dy \cos. u + dx \operatorname{sen.} u}$.

Fero $F = \pi . \varphi y ds$; $F' = F + dF = \pi(\varphi y ds + dsd(\varphi y))$; $R' = R + dR$; $dy'' = d(y' + dy') = d(y + 2dy + d^2y) = dy + 2d^2y + d^3y$; $dx'' = dx + 2d^2x + d^3x$; $\cos. u' = \cos. u + d(\cos. u)$; $\text{sen}. u' = \text{sen}. u + d(\text{sen}. u)$. Así la equacion precedente se transformará en

$$(X) \ldots o = \begin{cases} \varphi \cos. u\,(2Rd^2y + dRdy) + \varphi y\ \text{sen}. u\,(2Rd^2x + dRdx) \\ + Rdy . d(\varphi y \cos. u) + Rdx . d(\varphi y\ \text{sen}. u). \end{cases}$$

Por medio de esta equacion se encontrará la naturaleza de la curva generatriz CA, dada la ley de las fuerzas φ; ó recíprocamente dada la curva, se encontrará la ley de las fuerzas φ, lo que forma dos equaciones de la misma naturaleza que las que he considerado (6) para las bóvedas de cañon seguido. Me limito á un exemplo de cada una, por lo que hace á las medias-naranjas.

Exemplo de la primera qüestion.

33 *Supongamos que las fuerzas φ sean constantes y verticales; se pide la curva* CA.

Se tiene aquí, $\cos. u = 1$, $\text{sen}. u = o$; y la equacion (X) se transforma en

$$o = y(2Rd^2y + dRdy) + Rdy^2;$$

ó $o = ydy(2Rd^2y + dRdy) + Rdy^3$, cuya integral es $Ads^2 = Rydy^2$. Poniendo por R su valor $-\frac{dsdx}{d^2y}$, se tendrá $Adsd^2y + ydy^2dx = o$, ó $A\frac{d^2y}{ds} + \frac{ydy^2dx}{ds^2} = o$, ó $Ad\left(\frac{dy}{ds}\right) + \frac{ydy^2dx}{ds} = o$; lo que da (efectuando la diferenciacion indicada), $Adsd^2y - Adyd^2s + ydy^2dx = o$, cuya equacion no tiene ninguna diferencial constante. Hagamos dy constante, tendrémos $-Adyd^2s + ydy^2dx = o$, ó $-Ad^2s + ydydx = o$.

Sea $ds = zdy$; se tendrá $d^2s = dzdy$; y la equacion se transformará en $-Adz + ydx = o$. Luego, por causa de $dx = \sqrt{ds^2 - dy^2} = dy\sqrt{(z^2 - 1)}$, se tendrá $-Adz + ydy\sqrt{(z^2 - 1)} = o$, ó $ydy = \frac{Adz}{\sqrt{(d^2 - 1)}}$, cuya integral es $\frac{y^2}{2} = A.L.\left(\frac{z + \sqrt{(z^2 - 1)}}{B}\right)$. Así y es una funcion conocida de z; y por causa de $dx = zdy$, será igualmente x una funcion de z. Se podrá pues construir la cur-

Se vé que esta curva es diferente de la *catenaria* vuelta, siendo así que en el mismo supuesto de las fuerzas φ, debia de ser una catenaria vuelta para las bóvedas de cañon seguido (7). Es pues sinrazon que muchos prácticos emplean la catenaria vuelta para las medias-naranjas, en el caso en que se supone que todos los pesos de las dovelas son oprimidos verticalmente por fuerzas iguales.

Exemplo de la segunda qüestion.

34 *Suponiendo verticales las direcciones de las fuerzas* φ, *y la curva* CA *un quarto de elipse, cuyo semi-exe* OC $=$ a, *el semi-exe* OA $=$ b: *se pide el valor de* φ.

Primeramente la equacion fundamental (C) se transforma en

$$o = \varphi y(2Rd^2y + dRdy) + Rdy.\,d(\varphi y),$$
$$\text{ó } o = \varphi y(2Rdyd^2y + dRdy^2) + Rdy^2d(\varphi y),$$

cuya integral es $Ads^2 = \varphi yRdy^2$. Luego $\varphi = \frac{Ads^2}{Rydy^2}$. Pero por la naturaleza de la elipse

$$\frac{ds^2}{Rydy^2} = \frac{ab^2}{y(b^2 - y^2)\sqrt{(b^4 - b^2y^2 + a^2y^2)}}.$$

Así se tendrá φ en funcion de y. Debe de determinarse la constante A por la condicion de que en el vértice C el valor de φ es dado.

ESCOLIO.

35 Suponiendo todas las partes de una media-naranja en equilibrio, se podrá considerar una de sus porciones elementales como una bóveda parcial, y se determinará el grueso de los pies derechos que la sostienen por el método del artículo 24. Creo no debo entrar en nuevos detalles por lo que hace á esto.

CAPITULO III.

De la figura exterior de los pies derechos de una media-naranja, quando estos pies derechos procuran dividirse por hiladas horizontales.

PROBLEMA.

36 *Sea una media-naranja producida por la revolucion del espacio* ACca (fig. 9) *al rededor del exe vertical* OCQ, *y que se apo-*

ye sobre sus pies derechos, segun las juntas extremas inferiores, que son simétricamente perpendiculares á la curva del intrados ACA'; *se pide la curva* AMF *que debe de formar la cara exterior del pie derecho para el estado de equilibrio, suponiendo que la cara interior* AD *sea vertical, que el pie derecho procura dividirse por hiladas horizontales* PM, *por medio de movimientos de rotacion al rededor de los puntos* M; *y que ademas esté fuertemente detenida la base del pie derecho.*

Imaginarémos, como anteriormente, por el exe KOCQ de la bóveda una infinidad de planos verticales, que dividan la media-naranja en una infinidad de porciones; y determinarémos las condiciones de equilibrio entre estas porciones, consideradas como bóvedas parciales.

Tomemos QN sobre el exe KOCQ para representar la fuerza que resulta quando se suman entre sí el peso de la doble porcion superior de la media-naranja, y el peso de la doble porcion del cilindro, que representa la linterna con que puede estar cargada la media-naranja en el vértice; descompongamos la fuerza QN en otras dos QI, QS perpendiculares á las juntas Aa, A'a'; y haciendo Ah=QI, descompogamos la fuerza Ah en otras dos Aq, Af, la una horizontal, y la otra vertical. Sea el rectángulo pequeño EE'ee' de segundo órden, el elemento del trapecio MmPp.

Sean

el seno total .... $=1$
el ángulo OQA .... $=m$
el ángulo elemental que describe la curva generatriz de la media naranja .... $=\pi$
la doble porcion elemental producida por el movimiento de la area Aaca'A' al rededor de la montea .... $=2\pi.\text{S}$
CO .... $=a$
OA ó RP .... $=b$
el radio ó la base del cilindro que hace veces de linterna .... $=r$
la altura del cilindro .... $=2f$
la abscisa AP de la curva AMF .... $=x$
la ordenada PM .... $=y$
la recta RE .... $=t$

1º Se tendrá, fuerza A$h=\frac{2\pi(\text{S}+r^2f.\text{sen.}m)}{\text{sen.}2m}$; fuerza A$q$..... $=\pi.(\text{S}+r^2f).\text{tang.}m$; fuerza A$f=\pi(\text{S}+r^2f)$. Así, con-

derando los momentos de las fuerzas Aq, Af con relacion al punto M, se tendrá

Momento de la fuerza $Aq = \pi x (S + r^2 f)$. tang. m

Momento de la fuerza $Af = \pi y (S + r^2 f)$.

2º El pequeño sólido anular, descrito por el rectángulo $EE'ee'$, es $\pi t dt dx$ para el ángulo π; y su momento, con relacion al punto M, es $\pi t dt dx (b + y - t)$.

En estas expresiones no hay al presente mas variables que x y t; y es necesario empezar por integrarlas, de manera que se desvanezcan las integrales quando $t = b$, y reciban sus valores completos quando $t = b + y$: por esto se encontrará que la capa elemental producida por el trapecio $PMmp = \frac{\pi dx (2by + y^2)}{2}$, y que su momento, con relacion al punto M, es $\frac{\pi dx (3by^2 + y^3)}{6}$. Luego el centro de gravedad de la porcion, de la qual un elemento es esta misma capa, dista del exe AP de la cantidad......... $\frac{\int (3by^2 + y^3) dx}{3 \int (2by + y^2) dx}$; y por consiguiente la distancia de este mismo punto á la vertical MT es $y - \frac{\int (3by^2 + y^3) dx}{3 \int (2by + y^2) dx}$: lo que da finalmente $\frac{\pi y \int (2by + y^2) dx}{2} - \frac{\pi \int (3by^2 + y^3) dx}{6}$ por momento de la porcion en qüestion con respecto á la vertical MT.

3º Suponiendo siempre la fuerza de adherencia proporcional á las superficies, si se llama F el peso que expresa la adherencia para una superficie dada c^2, es evidente que el momento de la adherencia de la superficie descrita por Ee con la superficie contigua, con relacion al punto M, tiene por expresion $\frac{\pi F . t dt}{c^2} (b + y - t)$, cuya integral es $\frac{\pi F . (3by^2 + y^3)}{6c^2}$, tomando esta integral, de modo que se desvanezca quando $t = b$, y que reciba su valor completo quando $t = b + y$.

Ahora bien, para el equilibrio se necesita que el momento de la fuerza Aq sea igual al momento de la fuerza Af, del peso de la porcion y de la fuerza de adherencia. Así se tendrá la equacion fundamental.

$$x(S+r^2f).\text{tang}.\,m = y(S+r^2f)+y\frac{\int(2by+y^2)\,dx}{2} \ldots\ldots\ldots$$
$$-\frac{\int(3by^2+y^3)\,dx}{6}+F\frac{(3by^2+y^3)}{6c^2}.$$

Haciendo, para abreviar, $S^2+r^2f=M$; tang. $m=\lambda$; $\frac{F}{c^2}=N$: la equacion precedente se transformará en

$$\lambda Mx = My + y\frac{\int(2by+y^2)\,dx}{2}-\frac{\int(3by^2+y^3)\,dx}{6} \ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{N(3by^2+y^3)}{6}.$$

Diferencio dos veces esta equacion haciendo dy constante; y lo pongo todo en un miembro, lo que da

$$(6\lambda M-3by^2-2y^3)d^2x-(12by+9y^2)\,dxdy-N(b+y)\,dy^2=0.$$

Hago despues $dx=zdy$, y por consiguiente $d^2x=dzdy$; lo que muda la equacion en esta otra

$$(6\lambda M-3by^2-2y^3)dz-(12by+9y^2).zdy-N(b+y)dy=0;$$

ó en esta otra

$$dz-\frac{(12by+9y^2).zdy}{6\lambda M-3by^2-2y^3}-\frac{N(b+y)dy}{6\lambda M-3by^2-2y^3}=0:$$

equacion de la forma $dz+Pzdy+Qdy=0$, siendo P y Q funciones de y.

Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.

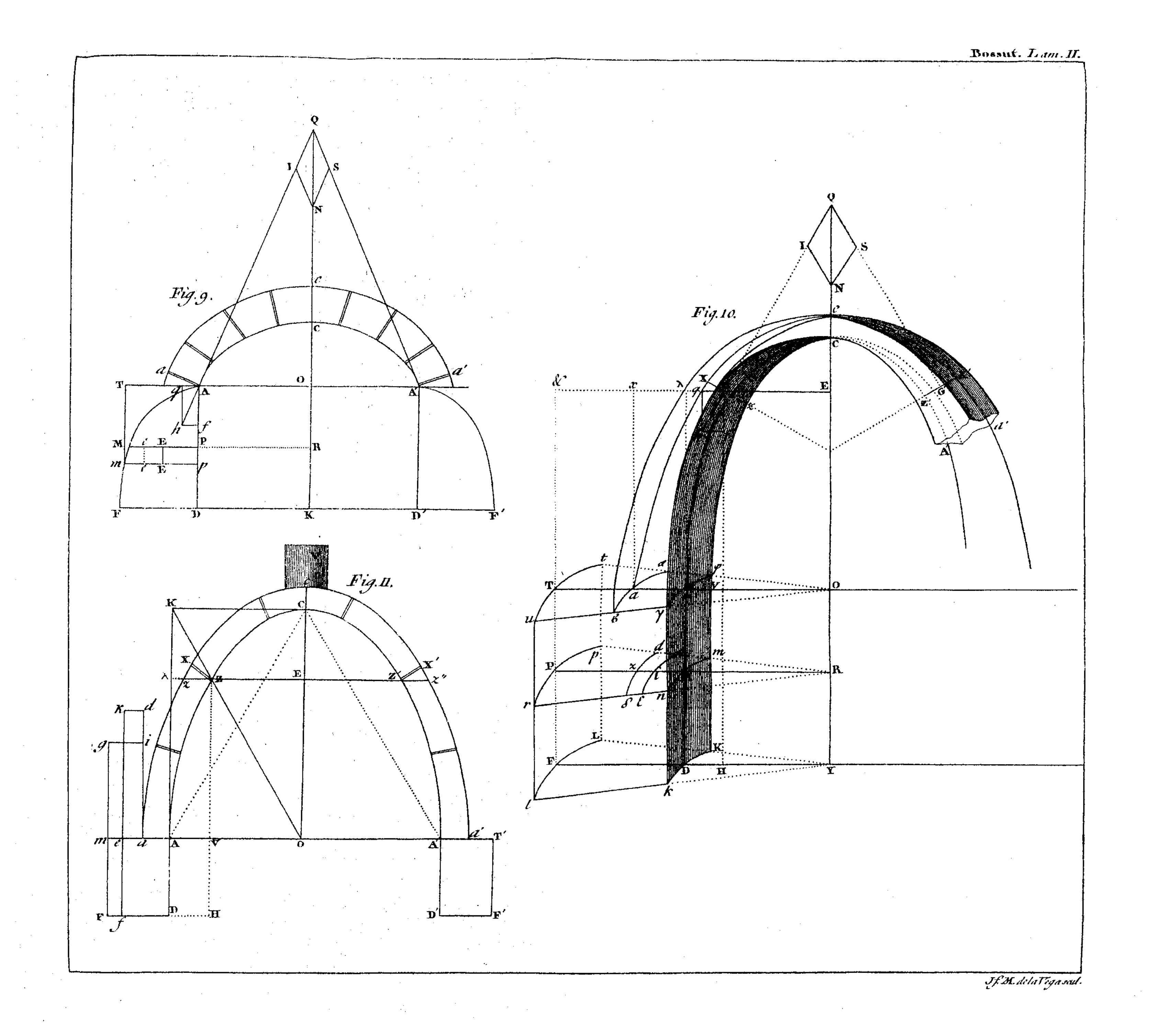
Fig. 5.

Fig. 6.

Fig. 7.

Fig. 8.

H.M. de la Vega scul.


Bossut. Lam. II.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
J.f.M. de la Vega sc.